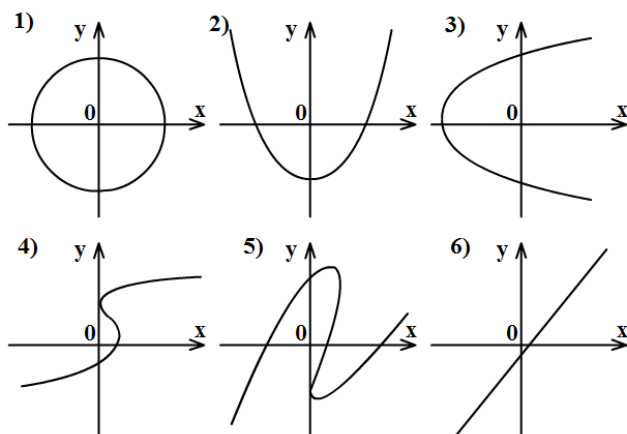


Занятие 1. Постановка цели. Проверка владения базовыми умениями.

На данном занятии надо рассказать о целях и задачах изучения курса, о важности получаемых знаний для итоговой аттестации как в основной, так и в средней школе. Проверка базовых знаний осуществляется за счет вводного тестирования, которое можно осуществить с помощью компьютера.

Тест.

1. На рисунке представлены различные кривые. Выберите те, которые являются графиками функций:

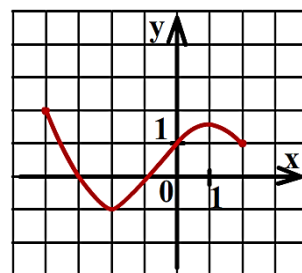


2. Какими способами можно задать функцию? Выберите номера верных утверждений, записав их в порядке возрастания без пробелов и запятых.

- 1) словесный способ;
- 2) функциональный способ;
- 3) аналитический способ;
- 4) бессловесный способ;
- 5) табличный способ;
- 6) графический способ.

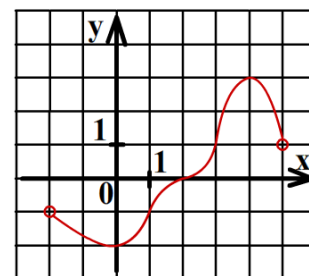
3. Функция задана графиком. Укажите область определения этой функции

- 1) $[-4; -3) \cup (-1; 2]$;
- 2) $[-1; 2]$;
- 3) $(-3; -1)$;
- 4) $[-4; 2]$.



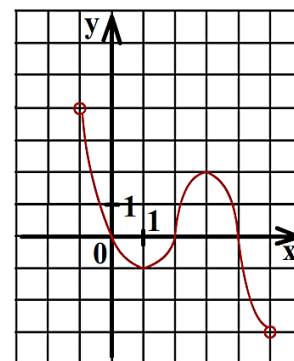
4. Функция задана графиком. Укажите область определения этой функции.

- 1) $(-2; 5)$; 3) $(2; 5)$;
2) $[-2; 3]$; 4) $(-2; 1]$.



5. Функция задана графиком. Укажите множество значений этой функции.

- 1) $(-1; 5)$;
2) $(-1; 0) \cup (2; 4)$;
3) $(0; 2) \cup (4; 5)$;
4) $(-3; 4)$.



6. Область определения функции $y = \sqrt{x - 4}$

- 1) $x \geq 4$; 2) $x \leq 4$; 3) $x \neq 4$

7. Найдите значение функции $y = \frac{1}{x+3} - 1$ при $x = -2$

- 1) 0; 2) -2; 3) -0,8.

8. Какая из функций, приведенных ниже, является линейной:

- 1) $y = \frac{1}{x} - 2$; 2) $y = x - 2$; 3) $y = x^2 - 2$?

9. Какой из графиков параллелен прямой $y = -x$:

- 1) $x - y = 3$; 2) $y = 1 - x$; 3) $y = -0,8$?

10. Графику какой функции принадлежит точка A (2; 3):

- 1) $y = -2x^2$; 2) $y = \frac{1}{2}x^2$; 3) $y = \frac{6}{x}$?

11. Задайте формулой функцию, заданную табличным способом

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-3	-2	-1	0

- 1) $y = -x^2 - 1$; 2) $y = x - 2$; 3) $y = \frac{-8}{x}$?

12. Задайте формулой функцию, заданную табличным способом:

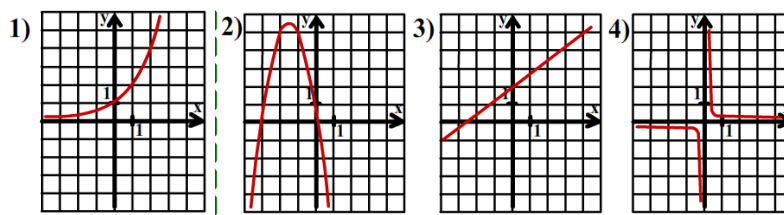
x	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	$\frac{1}{4}$
y	6,25	4	2,25	1	0,25	0	$\frac{1}{16}$

1) $y = -x^2 - 1$

2) $y = x^2$;

3) $y = \frac{8}{x}$?

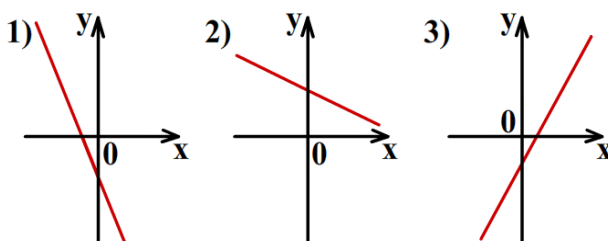
13. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.



A) $y = -2x^2 - 6x + 1$; Б) $y = \frac{1}{10x}$; В) $y = \frac{4}{5}x + 2$

А	Б	В

14. На рисунках изображены графики функций вида $y = kx + b$. Установите соответствие между знаками коэффициентов k и b и графиками функций.



КОЭФФИЦИЕНТЫ

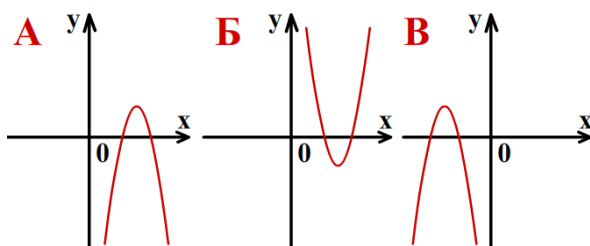
A) $k < 0, b > 0$; Б) $k > 0, b < 0$; В) $k < 0, b < 0$

А	Б	В

15. Найдите абсциссу вершины параболы $y = x^2 + 6x - 7$.

Ответ. _____

16. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.



ФОРМУЛЫ

1) $y = 2x^2 - 14x + 22$; 2) $y = -2x^2 - 14x - 22$; 3) $y = -2x^2 + 14x - 22$

А	Б	В

Ответы.

1	2	3	4	5	6	7	8
26	2356	4	1	4	1	1	2
9	10	11	12	13	14	15	16
2	3	2	3	243	231	-3	321

Более подготовленным учащимся можно предложить другой вариант теста.

Вариант 1

Часть I

1. Функция задана формулой $f(x) = \frac{5x-2}{2x+8}$. Найдите $f(0)$.

- 1) 0,25 2) -4 3) $-\frac{1}{4}$ 4) 2,5

2. Укажите область определения функции, график которой $y=f(x)$ изображен на рис.1.

- 1) $(-\infty; \infty)$
 2) $[-8; 6]$
 3) $(-8; 6)$
 4) $[-5; 6]$

3. Укажите область значений функции, график которой $y=f(x)$ изображен на рис.1.

- 1) $[-2; 4]$

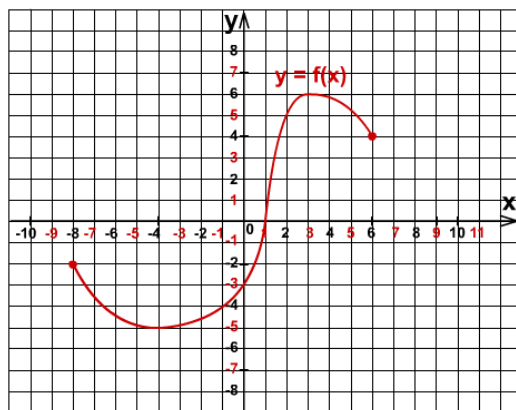


рис. 1

2) $(-5; 6)$

3) $[-5; 6]$

4) $[-8; 6]$

4. Найдите нули функции $g(x) = \frac{(5-2x)(x+3)}{x-4}$

1) -3 2) -3; 2,5 3) -3; 2,5; 4 4) -2,5; 3

5. Решите неравенство $f(x) > 0$, используя рис.1.

1) $[1; 6]$ 2) $(1; 6]$ 3) $(1; 6)$ 4) $(-4; 3)$

6. Назовите промежутки убывания функции f , заданной графически на рис. 1.

1) $[-5; 6]$ 2) $[-4; 3]$ 3) $[-5; -2], [4; 6]$ 4) $[-8; -4], [3; 6]$

7. Функция задана формулой $f(x) = 5x^2 - 10x$. Найдите значения аргумента x , при которых значение функции равно -5.

Часть 2

8. Найдите наименьшее значение x , при котором значение функции

$f(x) = |x + 8| - 3$ равно 0.

9. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = \sqrt{3x - 7}$.

10. При каких значениях a функция $f(x) = (5-2a)x - 7,5$ является возрастающей?

Вариант 2

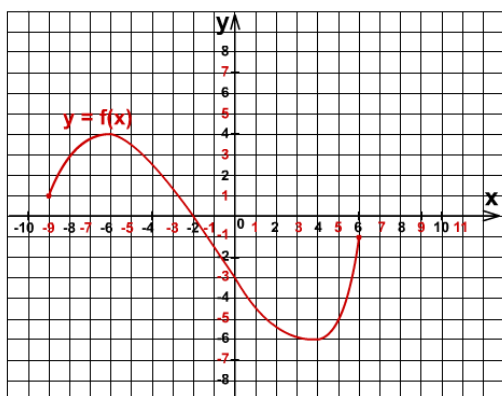


рис. 2

Часть 1

1. Функция задана формулой $f(x) = \frac{7x-3}{21x+4}$.

Найдите $f(0)$.

1) $\frac{1}{3}$ 2) $-\frac{3}{4}$ 3) 0,75 4) $-\frac{4}{3}$

2. Укажите область определения функции, график которой $y=f(x)$ изображен на рис.2.

1) $(-\infty; \infty)$

2) $(-9; 6)$

3) $[-6; 4]$

4) $[-9; 6]$

3. Укажите область значений функции, график которой $y=f(x)$ изображен на рис.2.

1) $[-9; 6]$

2) $(-\infty; \infty)$

3) $[-6; 4]$

4) $(-6; 4)$

4. Найдите нули функции $g(x) = \frac{(x-7)(6x-4)}{x+8}$

1) 1,5; 7 2) -8; 1,5; 7 3) -7; -1,5 4) $\frac{2}{3}; 7$

5. Решите неравенство $f(x) < 0$, используя рис.2.

1) $[-2; 6]$ 2) $(-2; 6]$ 3) $[0; 6]$ 4) $[-6; 4]$

6. Назовите промежутки убывания функции f , заданной графически на рис. 2.

1) $[-9; -6], [4; 6]$ 2) $[-9; 6]$ 3) $[1; 4], [4; 6]$ 4) $[-8; -4], [3; 6]$

7. Функция задана формулой $f(x) = -3x^2 + 12x$. Найдите значения аргумента x , при которых значение функции равно 12.

Часть 2

8. Найдите наибольшее значение x , при котором значение функции

$f(x) = -|x + 3| + 8$ равно 0.

9. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = \sqrt{5x + 11}$.

10. При каких значениях a функция $f(x) = (-7-4a)x + 3,5$ является возрастающей?

Ответы.

Вариант 1

Часть 1:

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
Ответ	3	2	3	2	2	4	1

Часть 2:

8. Найдите наименьшее значение x , при котором значение функции $f(x) = |x + 8| - 3$ равно 0.

Указания к оцениванию	Баллы
Дано решение с объяснением. Правильный ответ: -11	2
Допущена вычислительная ошибка при верно раскрытом модуле выражения	1
Во всех остальных случаях	0

9. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = \sqrt{3x - 7}$.

Указания к оцениванию	Баллы
Дано решение с объяснением. Правильный ответ: 0	2
Дан правильный ответ, но допущена ошибка в объяснениях	1
Во всех остальных случаях	0

10. При каких значениях a функция $f(x) = (5 - 2a)x - 7,5$ является возрастающей?

Указания к оцениванию	Баллы
Дано решение с объяснением. Правильный ответ: 3	3
Дан правильный ответ, нет подробных объяснений, в каких случаях линейная функция является возрастающей.	2
Нет правильного ответа из-за вычислительной ошибки при решении верно составленного неравенства.	1
Во всех остальных случаях	0

Вариант 2**Часть 1:**

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
Ответ	2	4	3	1	2	1	2

Часть 2:

8. Найдите наибольшее значение x , при котором значение функции $f(x) = -|x + 3| + 8$ равно 0.

Указания к оцениванию	Баллы
Дано решение с объяснением. Правильный ответ: 5	2
Допущена вычислительная ошибка при верно раскрытом модуле выражения	1
Во всех остальных случаях	0

9. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = \sqrt{5x + 11}$.

Указания к оцениванию	Баллы
Дано решение с объяснением. Правильный ответ: 0	2
Дан правильный ответ, но допущена ошибка в объяснениях	1
Во всех остальных случаях	0

10. При каких значениях a функция $f(x) = (-7 - 4a)x + 3,5$ является возрастающей?

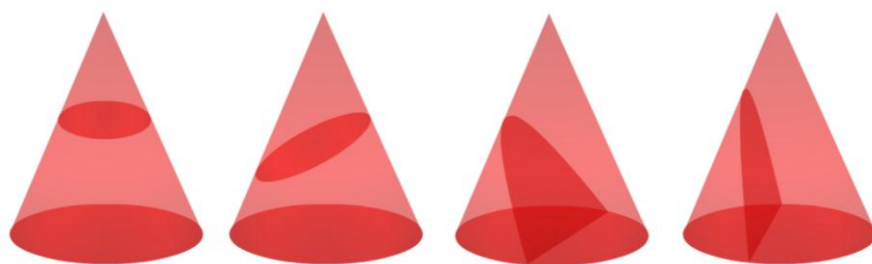
Указания к оцениванию	Баллы
Дано решение с объяснением. Правильный ответ: $(-1,75; \infty)$	3
Дан правильный ответ, нет подробных объяснений, в каких случаях линейная функция является возрастающей.	2
Нет правильного ответа из-за вычислительной ошибки при решении верно составленного неравенства.	1
Во всех остальных случаях	0

Занятие 2. Геометрические преобразования графиков функций.

Ход занятия

Историческая справка.

Коническими сечениями занимались математики Древней Греции. Ученик Евклида, Аполлоний Пергский, живший в 262-190 гг. до н. э., в труде “Конические сечения” дал полное изложение их теории. Долгое время конические сечения, считавшиеся вершиной греческой геометрии – эллипсы, параболы, гиперболы – казались плодом математической фантазии, не имеющим отношения к реальной действительности.



Эллипс, парабола и гипербола. Именно Аполлоний предложил общепринятые названия этих кривых; до него их называли просто «сечениями конуса». Он ввёл и другие математические термины, латинские аналоги которых навсегда вошли в науку, в частности: асимптота, абсцисса, ордината, аппликата.

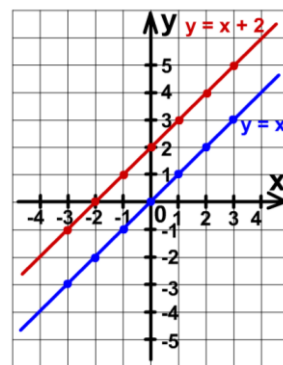
Класс можно разбить на группы и предложить провести исследовательскую работу. В течении урока учащимися под руководством учителя будут получены основные правила преобразования графиков элементарных функций.

Если известен график некоторой функции $y=f(x)$, то с помощью простейших преобразований (осевой, центральной симметрии, параллельного переноса) можно строить графики более сложных функций.

Задание 1. Рассмотрим две функции $y=x$ и $y=x+2$.

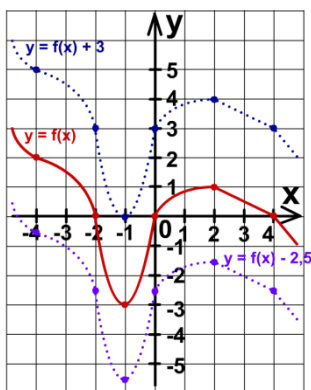
Составим таблицу значений этих функций на промежутке $[-3; 3]$ с шагом 1.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=x+2$	-1	0	1	2	3	4	5



Легко заметить, что значения второй функции в каждой точке на 2 больше, чем первой, а графики этих функций параллельны.

Используя рисунок, предложить учащимся самостоятельно сформулировать правило 1.

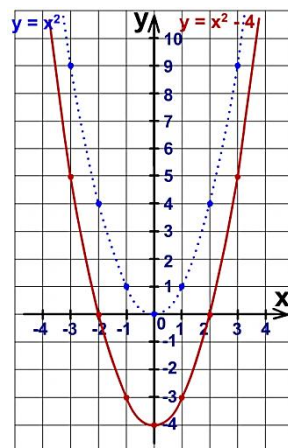


Правило 1. График функции $y=f(x)+k$ получается параллельным переносом графика функции $y=f(x)$ в положительном направлении оси Oy на k единиц при $k>0$ и в отрицательном направлении этой оси на $|k|$ при $k<0$.

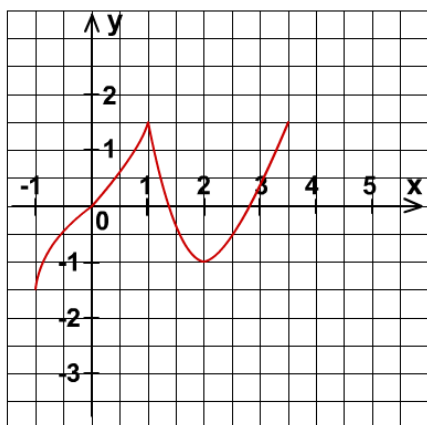
Пример 1. Построить график функции $y = x^2 - 4$.

Решение.

График функции $y=x^2 - 4$ может быть получен из графика функции $y = x^2$ путем параллельного переноса в отрицательном направлении оси Oy на 4 единицы.



Задания для самостоятельной работы.



1. Зная график функции $y=x^3$, постройте график функции $y=x^3+3$.
2. Зная график функции $y = \sqrt{x}$, постройте график функции $y = \sqrt{x} + 2$.
3. Зная график функции $y=f(x)$ постройте график функции $y=f(x)-1$.

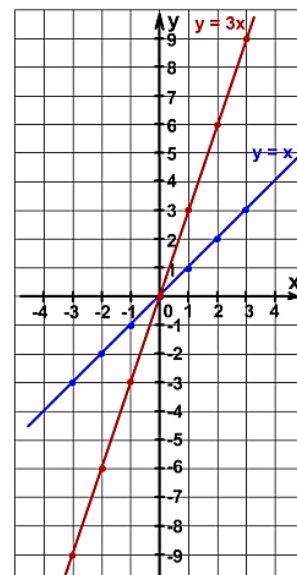
Рассмотрим еще одно геометрическое преобразование графиков функций.

Задание 2. Рассмотрим две функции $y = x$ и $y = 3x$.

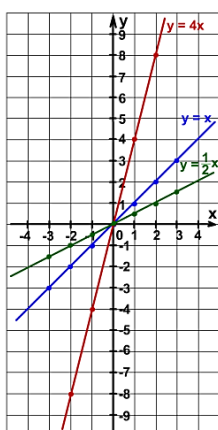
Составим таблицу значений этих функций на промежутке $[-3; 3]$ с шагом 1.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=3x$	-9	-6	-3	0	3	6	9

Заметим, что для каждого значения x расстояние по y увеличивается, кроме точки O , то есть график как бы растягивается вдоль оси y .



Используя рисунок, предложить учащимся самостоятельно сформулировать правило 2.

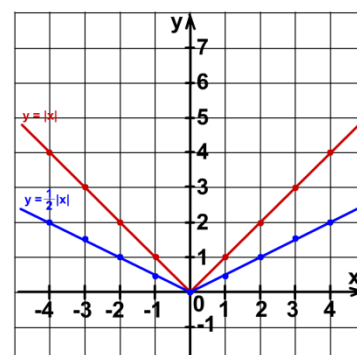


Правило 2. График функции $y = \alpha f(x)$ получается растяжением графика $y = f(x)$ вдоль оси Oy в α раз при $\alpha > 1$ и сжатием вдоль этой оси в $\frac{1}{\alpha}$ раз при $0 < \alpha < 1$.

Пример 2. Построить график функции $y = \frac{1}{2} |x|$.

Решение.

График функции $y = \frac{1}{2} |x|$ может быть получен из графика функции $y = |x|$ путем сжатия вдоль оси Oy в 2 раза.



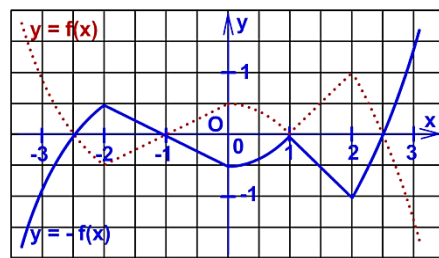
Задания для самостоятельной работы.

1. Постройте график функции $y = 2x^2$, используя геометрические преобразования.
2. Постройте график функции $y = \frac{1}{3} x^3$.

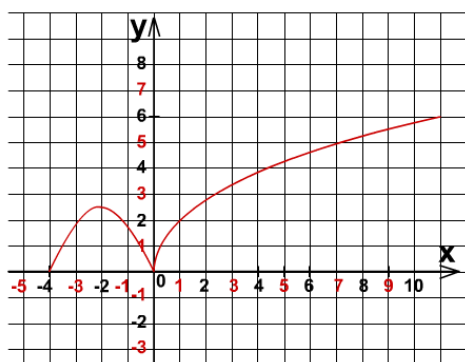
Задание 3. Предложить учащимся, используя график функции

$y = f(x)$, построить график функции $y = -f(x)$.

Если $\alpha = -1$, то для одного и того же значения аргумента значения ординаты графиков $y = f(x)$ и $y = -f(x)$ противоположны, значит графики симметричны относительно оси абсцисс.



Используя рисунок можно предложить учащимся самостоятельно сформулировать правило 3.

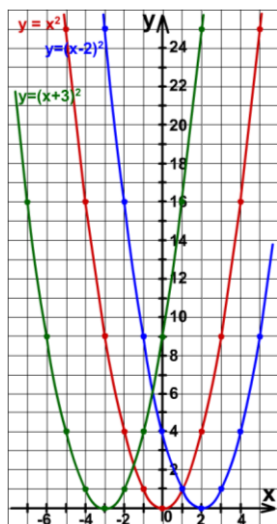
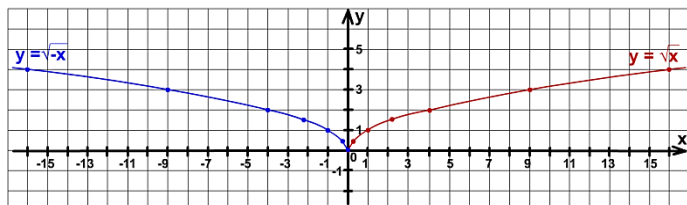


Правило 3. График функции $y = -f(x)$ получается симметричным отображением графика функции $y = f(x)$ относительно оси Ox .

Задания для самостоятельной работы.

1. Постройте график функции $y = -x^3$.
2. Используя график функции $y = f(x)$ постройте график функции $y = -f(x)$

Задание 4. Предложить учащимся самостоятельно построить в одной системе координат графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt{-x}$ и сформулировать правило 4.



Правило 4. График функции $y = f(-x)$ получается симметричным отображением графика функции $y = f(x)$ относительно оси Oy .

Задания для самостоятельной работы.

Даны функции $y = x^2$, $y = (x - 2)^2$ и $y = (x + 3)^2$.

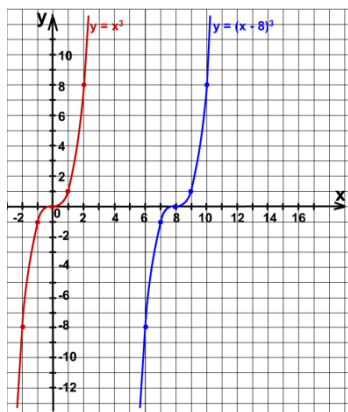
- а) Составьте таблицу значений функций на промежутке $[-3; 3]$ с шагом 1;
- б) Постройте графики функций в одной системе координат.

График функции $y = (x - 2)^2$ получается параллельным переносом графика функции $y = x^2$ в положительном направлении оси абсцисс на 2.

График функции $y = (x + 3)^2$ получается параллельным переносом графика функции $y = x^2$ в отрицательном направлении оси абсцисс на 3.

Предложить учащимся самостоятельно сформулировать правило 5.

Правило 5. График функции $y=f(x-a)$ получается параллельным переносом графика функции $y=f(x)$ в отрицательном направлении оси Ox на $|a|$ при $a<0$ и в положительном направлении при $a>0$.



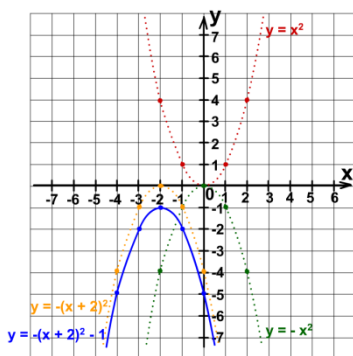
Задания для самостоятельной работы.

1. Постройте график функции $y = \frac{1}{x+1}$.
2. Постройте график функции $y = (x - 1)^3$.
3. Постройте график функции $y = x^2 - 2x + 1$

Далее можно рассмотреть более сложные задания, содержащие несколько преобразований.

Пример 3. Постройте график функции $y = -(x+2)^2 - 1$

Решение.



1. $y = x^2$
2. $y = -x^2$ – симметрия относительно оси Ox
3. $y = -(x+2)^2$ сдвиг влево на 2 единицы
4. $y = -(x+2)^2 - 1$ сдвиг вниз на 1

Задания для самостоятельной работы.

1. Постройте график функции $y = 2 + \frac{3}{x-1}$.
2. Постройте график функции $y = 2|x+1| - 3$

4. Домашнее задание. Повторить пройденный материал. Предложить учащимся задания из заданий, которые не успели разобрать на занятии.

Занятие 3. Построение графиков функции, содержащих знак абсолютной величины

Ход занятия

Историческая справка.

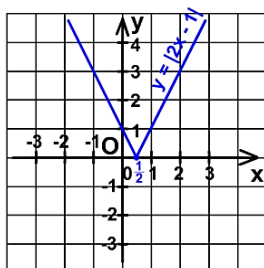
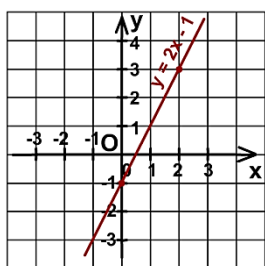


Начиная с XVII в. одним из важнейших понятий является понятие функции. Оно сыграло и поныне играет большую роль в познании реального мира. Идея функциональной зависимости восходит к древности, она содержится уже в первых математически выраженных соотношениях между величинами, в первых правилах действий над числами, в первых формулах для нахождения площади и объема тех или иных фигур. Те вавилонские ученые, которые 4—5 тысяч лет назад нашли для площади S круга радиусом r формулу $S = 3r^2$ (грубо приближенную), тем самым установили, пусть и несознательно, что площадь круга является функцией от его радиуса. Таблицы квадратов и кубов чисел, также применявшиеся вавилонянами, представляют собой задания функции.

Класс можно разбить на группы и предложить провести исследовательскую работу. В течении урока учащимися под руководством учителя будут получены основные правила построения графиков, содержащих модуль.

1. Построение графика функции $y = |f(x)|$

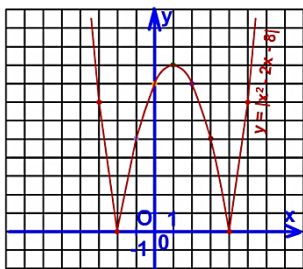
Задание 1. Постройте графики функций $y = 2x - 1$ и $y = |2x - 1|$.



$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0. \end{cases}$$

Правило 1.

Для построения графика функции $y = |f(x)|$ следует построить график функции $y = f(x)$ и ту часть графика, которая расположена в нижней полуплоскости, отобразить симметрично относительно оси абсцисс.



Пример 1.

Построить график функции $y = |x^2 - 2x - 8|$.

Построение

а) построим график функции $y = x^2 - 2x - 8$;

б) часть графика, расположенную в нижней

полуплоскости симметрично отображаем относительно

оси абсцисс.

Задания для самостоятельной работы

1. Постройте график функции $y = |3x - 4|$.

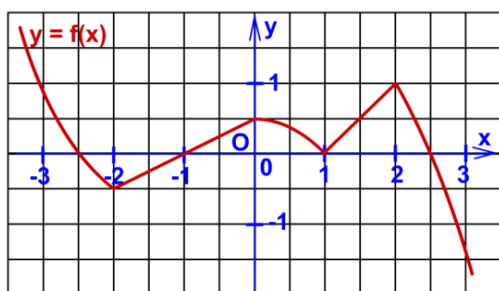
2. Постройте график функции $y = |x^2 - x - 6|$.

3. Постройте график функции $y = \left| 3 - \frac{1}{x} \right|$.

1. Построение графика функции вида $y = f(|x|)$.

Задание 2. Дан график функции $y = f(x)$, используя данный график,

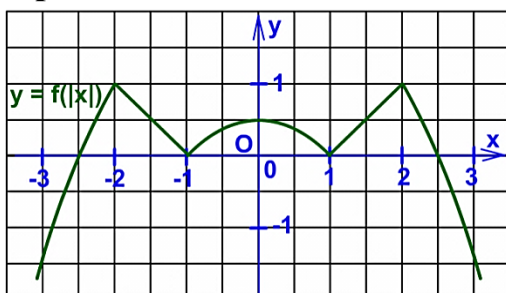
пользуясь определением модуля, построьте график функции вида $y = f(|x|)$.



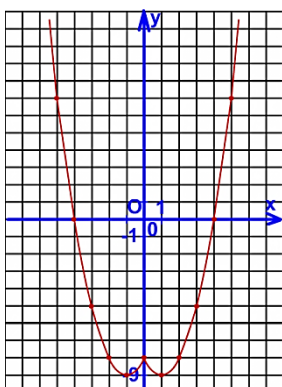
Выполнив задание, учащиеся формулируют правило построения графика функции вида $y = f(|x|)$.

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \geq 0, \\ f(-x), & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Правило 2.



Для построения графика функции $y = f(|x|)$ необходимо часть графика функции $y = f(x)$, лежащую в правой полуплоскости оставить неизменной, и ее же, отобразить симметрично относительно оси Оу в левую полуплоскость.



Пример 2.

Построить график функции $y = x^2 - 2|x| - 8$.

Построение

а) построим график функции $y = x^2 - 2x - 8$;

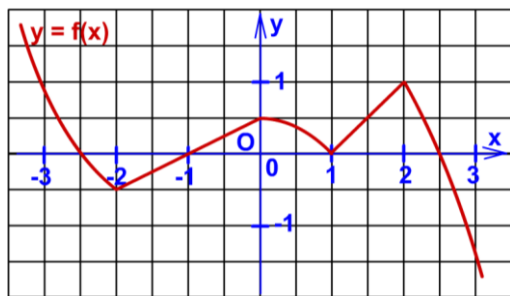
б) часть графика, расположенную в правой полуплоскости симметрично отображаем относительно оси ординат

Задания для самостоятельной работы

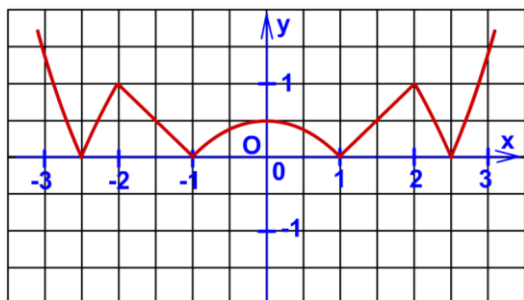
1. Постройте график функции $y=2|x|+3$.
2. Постройте график функции $y = x^2 - 2|x| - 12$.
3. Постройте график функции $y = 2 + \frac{3}{|x|}$.

2. Построение графика функции $y=|f(|x|)|$

Задание 3. Дан график функции $y = f(x)$. Используя данный график, постройте график функции вида $y = |f(|x|)|$.



Выполнив задание, учащиеся формулируют правило построения графика функции вида $y = |f(|x|)|$.



Правило 3.

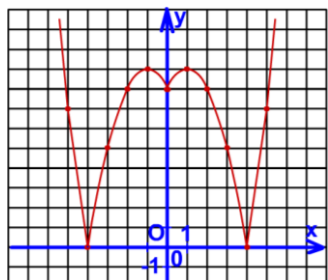
Для построения графика функции $y = |f(|x|)|$ следует построить график функции $y = f(x)$ и ту часть графика, которая расположена в нижней полуплоскости, отобразить относительно оси Ox , а затем часть графика при $x > 0$

отобразить симметрично относительно оси Oy .

Пример 3.

Построить график функции $y = |x^2 - 2|x| - 8|$.

Построение:



а) построим график функции $y = x^2 - 2x - 8$;

б) часть графика, расположенную в нижней полуплоскости симметрично отображаем относительно оси абсцисс.

в) часть графика, расположенную в правой полуплоскости симметрично отображаем относительно

оси ординат.

Задания для самостоятельной работы

1. Постройте график $y = |(|x| - 3)^2 - 2|$.
2. Постройте график функции $y = \left| \frac{4}{|x| - 2} \right|$.

4. Домашнее задание. Повторить пройденный материал. Предложить учащимся задания из написанных ниже задач для самостоятельного решения.

Задания для самостоятельного решения

Постройте графики функций:

- 1) $y = |1 - 2x|$
- 2) $y = |x - 3|$
- 3) $y = ||x - 1| - 1|$
- 4) $y = \frac{|x^2 - 1|}{x - 1}$
- 5) $y = \sqrt{(0,5x - 3)^2}$

Занятие 4. Построение графиков зависимостей $|y|=f(x)$,

$$y = |f_1(x)| + |f_2(x)| + \dots + |f_n(x)|.$$

Ход занятия



Историческая справка

Путь к первому чёткому определению понятия функции проложил Декарт, который систематически рассматривал в своей

«Геометрии» лишь те кривые, которые можно точно представить с помощью уравнений, притом преимущественно алгебраических. Постепенно понятие функции стало отождествляться таким образом с понятием аналитического выражения — формулы.

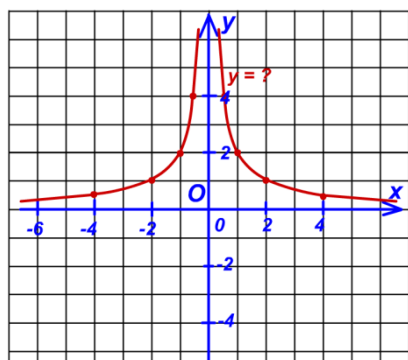
Слово «функция» (от латинского *functio* — совершение, выполнение) Лейбниц употреблял с 1673 г. в смысле *роли* (величина, выполняющая ту или иную функцию). Как термин в нашем смысле выражение «функция от x » стало употребляться Лейбницем и И. Бернулли, начиная с 1698 г. Лейбниц ввел также термины «переменная» и «константа» (постоянная). Для обозначения произвольной функции от x Иоганн Бернулли применял знак φ_x .

Класс можно разбить на группы и предложить провести исследовательскую работу. В течении урока учащимися под руководством учителя будут получены основные правила построения графиков, содержащих модуль.

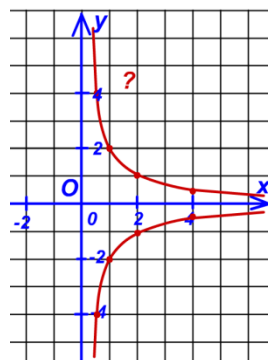
1. Построение графиков функций $|y|=f(x)$

Задание 1. Запишите уравнение зависимости, изображенной на рисунке:

а)



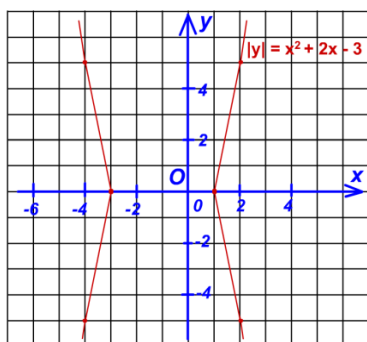
б)



Учащиеся, опираясь на выполненное задание, выводят правило построения зависимости вида $|y|=f(x)$.

Зависимость $|y|=f(x)$ является двузначной, так как по определению абсолютной величины $y = \pm f(x)$, где $f(x) \geq 0$, поэтому график симметричен относительно оси Ох. Значит, для построения графика необходимо:

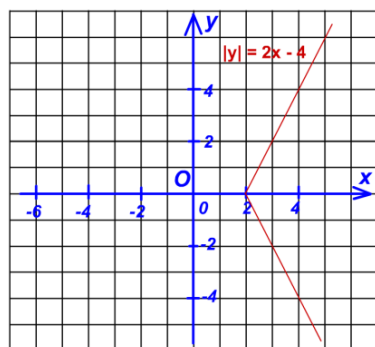
- Найти $D(y)$ из условия $f(x) \geq 0$
- На $D(y)$ построить график функции $y=f(x)$
- Отобразить построенный график относительно оси абсцисс



Пример 1. Построить график зависимости $|y|=x^2+2x-3$

Построение

- $y > 0$ на интервалах $(-\infty; -2)$ и $(4; +\infty)$
- построим график функции $y=x^2+2x-3$
- отобразим часть графика при $y > 0$ относительно оси абсцисс



Пример 2. Построить график зависимости $|y|=2x-4$

Построение

- построим график функции $y=2x-4$
- отобразим часть графика при $y > 0$ относительно оси абсцисс

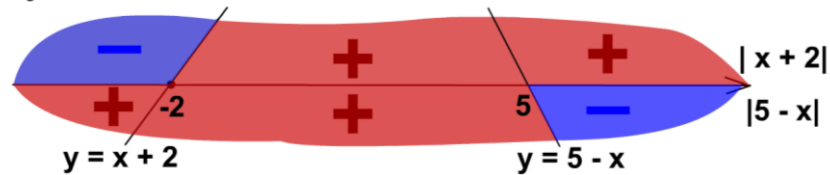
Задания для самостоятельной работы.

- Построить график зависимости $|y|=2-x$.
- Построить график зависимости $|y+1|=2-x$.
- Построить график зависимости $|y| = \sqrt{x-2} - 1$.

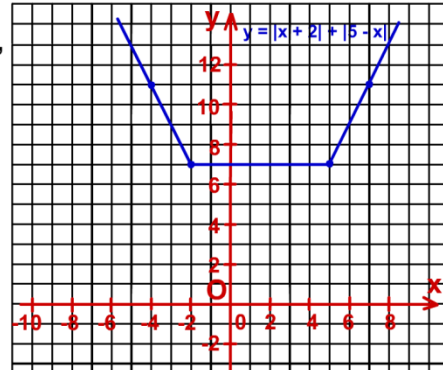
2. Построение графика функции и $y = |f_1(x)| + |f_2(x)| + \dots + |f_n(x)|$

Построить график функции $y = |x + 2| + |5 - x|$. Учащиеся приходят к выводу, что для построения графика необходимо раскрыть модули! Для этого необходимо рассмотреть всевозможную комбинацию знаков подмодульных выражений.

Нули: - 2 и 5



$$y = \begin{cases} -2x + 3, & \text{если } x \leq -2, \\ 7, & \text{если } -2 < x \leq 5, \\ 2x - 3, & \text{если } x > 5 \end{cases}$$



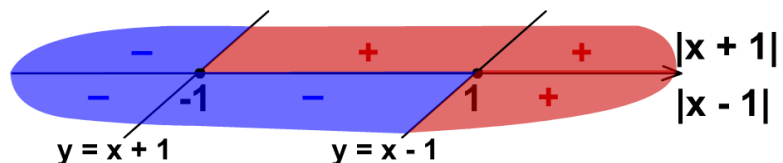
Характерной особенностью графиков функций, содержащих выражения со знаком модуля, является наличие «изломов» в тех точках, в которых выражения, стоящие под знаком модуля, изменяет знак.

Учащиеся самостоятельно выводят правило построения графика функции вида $y = |f_1(x)| + |f_2(x)| + \dots + |f_n(x)|$:

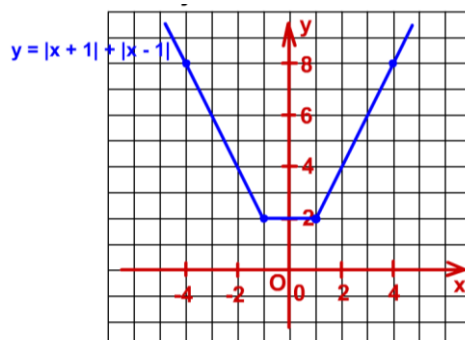
- Найти нули подмодульных выражений и нанести их на числовую прямую
- Раскрыть модули на каждом числовом промежутке
- Строим график функции на промежутках

Пример 3. Построить график функции $y = |x+1| + |x-1|$

Нули: - 1 и 1



$$y = \begin{cases} -2x, & \text{если } x \leq -1 \\ 2, & \text{если } -1 < x < 1 \\ 2x, & \text{если } x \geq 1 \end{cases}$$



Домашнее задание. Повторить пройденный материал. Предложить учащимся задания из написанных ниже задач для самостоятельного решения.

Задания для самостоятельного решения

Постройте графики зависимостей

1) $y = |x - 3| + |x + 1|$.

2) $y = |2x + 3| + |-x + 1| + x$.

3) $|y| = x^2 - 2x - 8$.

4) $|y| = x^2 - 3x + 2$.

5) $|y| = 2|x| - x^2$.

6) $|y| = 1 - \sqrt{1 - x}$.

Занятие 5. Графики в заданиях ОГЭ

Ход занятия

Историческая справка



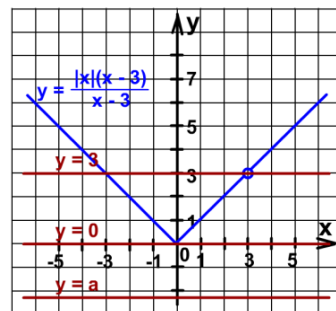
Леонард Эйлер даёт следующее определение функции: «Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого количества и чисел или постоянных количеств». Так понимали функцию на протяжении почти всего XVIII века. Но в некоторых своих произведениях Эйлер придаёт более широкий смысл функции, понимая её как кривую, начертанную «свободным влечением руки». В связи с таким взглядом Эйлера на функцию между ним и его современниками возникла полемика вокруг вопроса о возможности аналитического выражения произвольной кривой и о том, какое из двух понятий (кривая или формула) следует считать более широким.

Пример 1. Постройте график функции $y = \frac{|x|(x-3)}{x-3}$.

Найдите все значения a , при которых прямая $y = a$ имеет с графиком функции ровно одну общую точку.

Ответ. $a = 0$ и 3

Предложенное учащимся задание относится к группе заданий № 23 на ОГЭ.

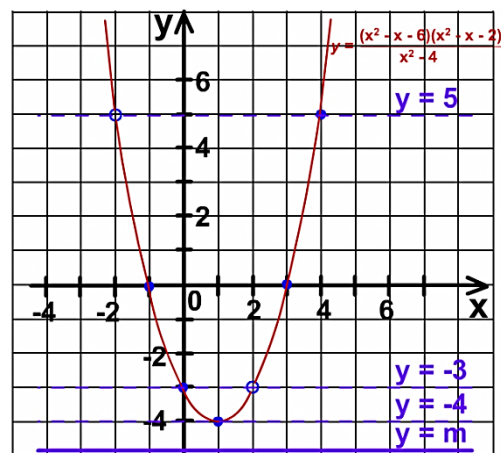


Пример 2. Постройте график функции $y = \frac{(x^2-x-6)(x^2-x-2)}{x^2-4}$. Найдите все значения m , при которых прямая $y=m$ имеет с графиком функции ровно одну общую точку.

Решение.

1. $D(y) = \mathbb{R}$, кроме $x=2$, $x=-2$
2. Так как $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$, $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{(x^2 - x - 6)(x^2 - x - 2)}{(x-2)(x+2)} &= \\ = \frac{(x-3)(x+2)(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+2)} &= \end{aligned}$$



$$= (x - 3)(x + 1)$$

Значит, нужно построить график квадратичной функции $y = x^2 - 2x - 3$ и не забыть про выколотые точки $x = 2$ и $x = -2$.

Вершина параболы : (1; -4)

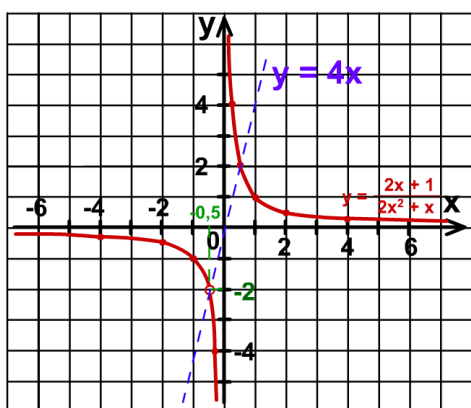
Нули функции: $x = -1$, $x = 2$

3. Теперь осталось определить при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком функции только одну общую точку. Понятно, что это будет вершина параболы и выколотые точки. Следовательно, $m = -4$, $m = 5$, $m = -3$

Ответ. При $m = -4$; -3 ; 5 графики функций имеют ровно одну общую точку.

Пример 3. (Ларин, вариант 102) Постройте график функции $y = \frac{2x+1}{2x^2+x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение



1. $D(y) = \mathbb{R}$, кроме $x = 0$, $x = -\frac{1}{2}$

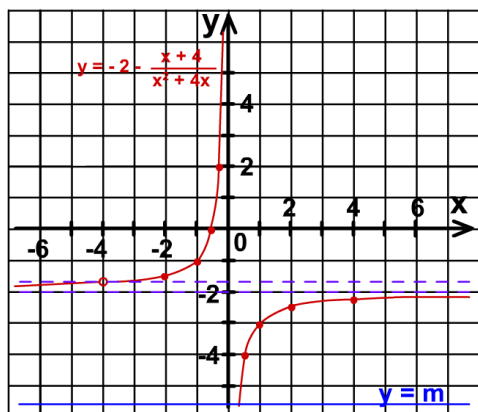
$$2. \frac{2x+1}{2x^2+x} = \frac{2x+1}{x(2x+1)} = \frac{1}{x}$$

3. Значит, нужно построить график функции $y = \frac{1}{x}$ и не забыть про выколотые точки $x = 0$ и $x = -0,5$.

Прямая $y = kx$ имеет с графиком функции ровно одну общую точку $(-0,5; -2)$.

$$-2 = -0,5k, k = 4.$$

Ответ: 4.



Пример 4. (Тренировочная работа СтатГрад 23 марта 2016)

Постройте график функции $y = -2 - \frac{x+4}{x^2+4x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком общих точек.

Решение

1. $D(y) = \mathbb{R}$, кроме $x = 0$, $x = -4$

2. Преобразуем выражение при условии, что $x \neq 0$, $x \neq -4$

$$-2 - \frac{x+4}{x^2+4x} = -2 - \frac{x+4}{x(x+4)} = -2 - \frac{1}{x}$$

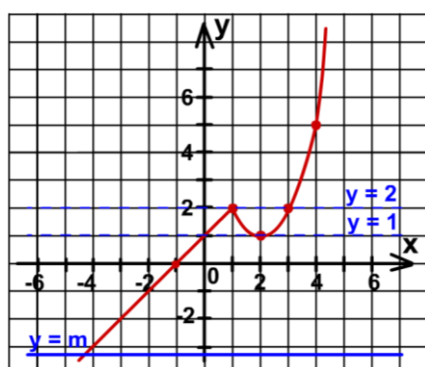
3. Значит, нужно построить график функции $y = -2 - \frac{1}{x}$ и не забыть про выколотые точки.

Прямая $y=m$ не имеет с графиком функции общих точек при $m=-2$, $m=-1\frac{3}{4}$

Ответ: -2 и $-1\frac{3}{4}$.

Пример 5. Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2 - 4x + 5, & \text{если } x \geq 1, \\ x + 1, & \text{если } x < 1, \end{cases}$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком функции ровно две общие точки.

Решение.



Построим график функции $y=x+1$ при $x < 1$ и график функции $y = x^2 - 4x + 5$ при $x \geq 1$.

Прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки, если она проходит через вершину параболы и точку $(1; 2)$. Получаем, что $m=1$ или $m=2$.

Ответ: $1; 2$.

Домашнее задание. Повторить пройденный материал. Предложить учащимся задания из написанных ниже задач для самостоятельного решения.

Задания для самостоятельного решения.

1. Постройте график функции $y = \frac{3x+1}{6x^2+2x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ не имеет с графиком общих точек. (Ответ: $m=0$; $m=-0,5$)
2. Постройте график функции $y = \frac{x^3+3x^2+16x+48}{x+3}$. Найдите все значения m , при которых прямая $y=mx$ не имеет с графиком функции общих точек. (Ответ: $m \in (-8; 8)$).
3. Постройте график функции $y = \frac{2x^3-x^2+18x-9}{2x-1}$. Найдите все значения m , при которых прямая $y=mx$ не имеет с графиком функции общих точек. (Ответ: $m \in (-6; 6) \cup \{18, 5\}$).

Занятие 6. Графики в заданиях ОГЭ

Ход занятия



Историческая справка

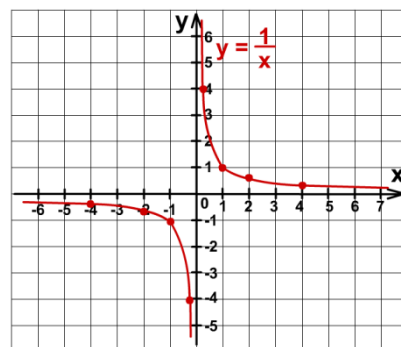
Задачи на уравнения с параметром появились впервые в астрономическом трактате, составленном в 499 г. индийским математиком и астрономом Ариабхатой.

Пример 1. Постройте график функции $y = \left| \frac{1}{x-2} + 1 \right|$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком функции одну общую точку.

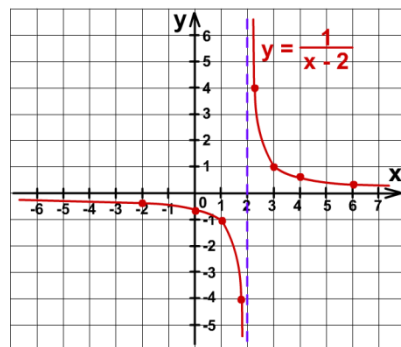
Решение.

1. Начнем с построения графика $y = \left| \frac{1}{x-2} + 1 \right|$

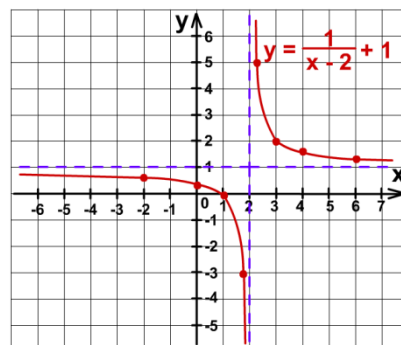
В “основе” его лежит график функции $y = \frac{1}{x}$ и все мы знаем, как он выглядит:



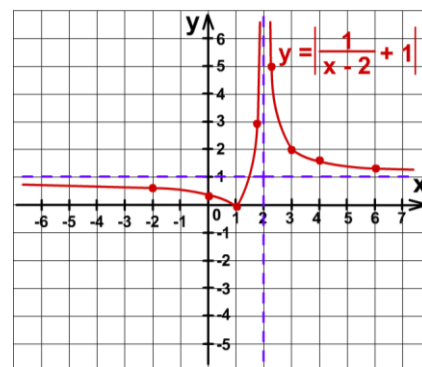
Теперь построим график $y = \frac{1}{x-2}$. Чтобы получить этот график, достаточно всего лишь сдвинуть полученный ранее график на две единицы вправо. Заметим, что, если бы в знаменателе дроби стояло бы выражение $x + 2$, то мы сдвинули бы график влево:



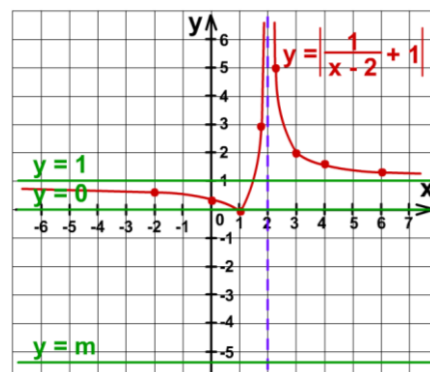
Наконец, сдвигаем график вверх на единицу:



Последнее, что нам осталось сделать, это построить график данной функции, если она заключена под знак модуля. Для этого отражаем симметрично вверх часть графика, лежащую в нижней полуплоскости.



Теперь осталось определить, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком функции только одну общую точку. Понятно, что это будет вершина параболы и выколотые точки. Следовательно, $m=0$, $m=1$.

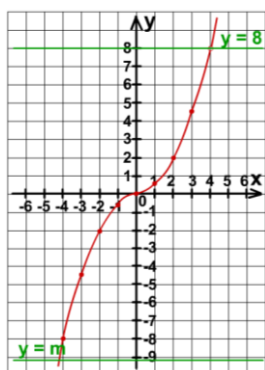


Ответ. $m=0$, $m=1$.

Пример 2. (СтатГрад 2014-2015уч. г.)

Постройте график функции $y = \frac{(0,5x^2 - 2x)|x|}{x-4}$ и определите при каких значениях m прямая $y=m$ не имеет с графиком функции ни одной общей точки.

Решение.



1. $D(y)=\mathbb{R}$, кроме $x=4$

$$2. \frac{(0,5x^2 - 2x)|x|}{x-4} = \frac{2x(x-4)|x|}{x-4} = 0,5x|x|$$

Значит, нужно построить график функции $y = -0,5x^2$ при $x < 0$ и график функции $y = 0,5x^2$ при $0 \leq x < 4$, $x > 4$

Теперь осталось определить при каких значениях m прямая $y=m$ не имеет с графиком функции общих точек. Понятно, что это выколотая точка. Следовательно, $m = 8$.

Ответ. 8

Пример 3. Постройте график функции $y = \frac{3,5|x|-1}{|x|-3,5x^2}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

Решение.

$$1. |x| - 3,5x^2 \neq 0 \Rightarrow |x| - 3,5|x|^2 \neq 0 \Rightarrow -|x|(3,5|x| - 1) \neq 0 \\ \Rightarrow x \neq 0 \text{ и } x \neq \pm \frac{2}{7}$$

$$D(y): (-\infty; +\infty) \setminus \{-\frac{2}{7}; 0; \frac{2}{7}\}$$

$$2. \frac{3,5|x|-1}{|x|-3,5x^2} = \frac{3,5|x|-1}{-|x|(3,5|x|-1)} = -\frac{1}{|x|}$$

3. Построение графика:

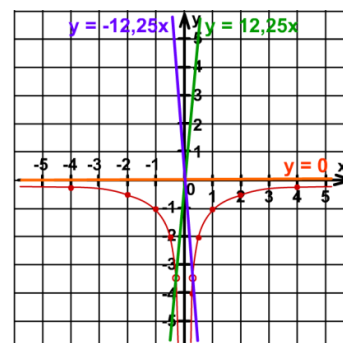
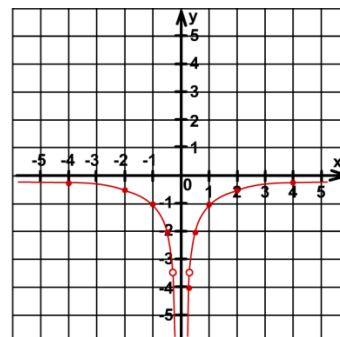
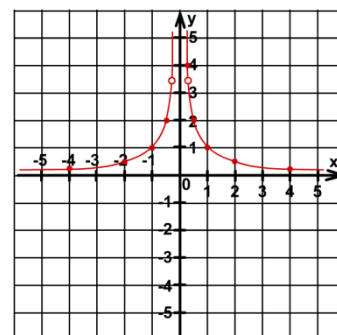
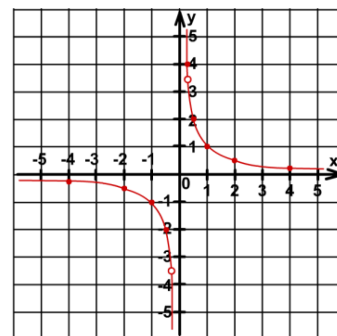
а) $y = \frac{1}{x}$.

б) $y = \frac{1}{|x|}$. Часть графика функции $y = \frac{1}{x}$, расположенная ниже оси Ox , симметрично отображается вверх.

в) $y = -\frac{1}{|x|}$. График функции $y = \frac{1}{|x|}$ симметрично отображается относительно оси абсцисс.

4. Прямая $y = kx$ не имеет с графиком ни одной общей точки, когда проходит через точку $(-\frac{2}{7}; -\frac{7}{2})$ или через $(\frac{2}{7}; -\frac{7}{2})$, или совпадает с осью абсцисс. Данная ситуация возможна при $k = 12,5; -12,5$ и 0 .

Ответ. $-12,5; 0; 12,5$.



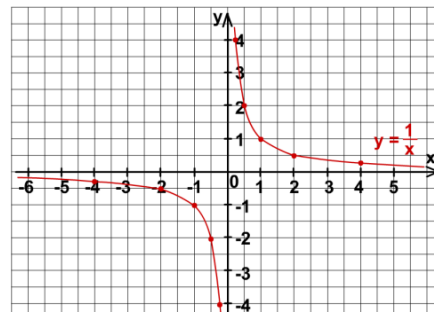
Пример 4. Постройте график функции $y = \left| \frac{1}{|x|-2} + 1 \right|$ и определите при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком три общие точки.

Решение.

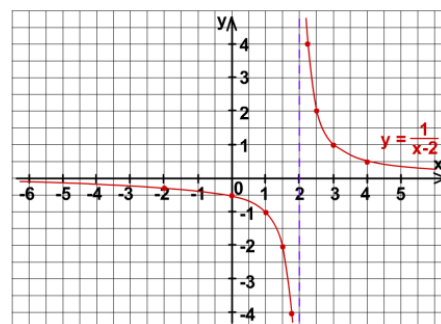
1. $D(y) = \mathbb{R}$, кроме $x = 2$, $x = -2$.

2. Построение графика:

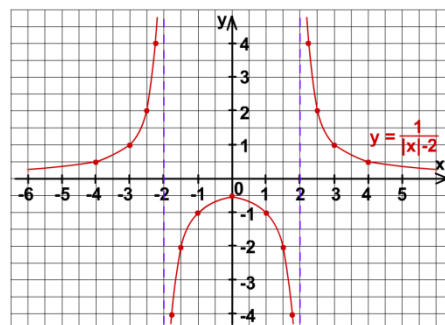
1) $y = \frac{1}{x}$



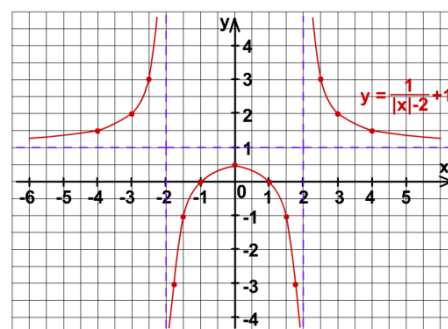
2) $y = \frac{1}{x-2}$. Сдвиг графика функции $y = \frac{1}{x}$ на 2 единичных отрезка вправо.



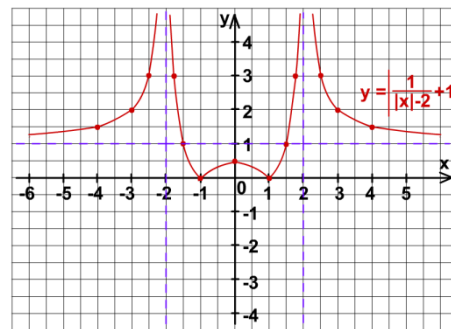
3) $y = \frac{1}{|x|-2}$. Часть графика функции $y = \frac{1}{x-2}$, расположенная слева, отбрасывается. Часть графика функции $y = \frac{1}{x-2}$, расположенная справа, симметрично отображается относительно оси ординат.



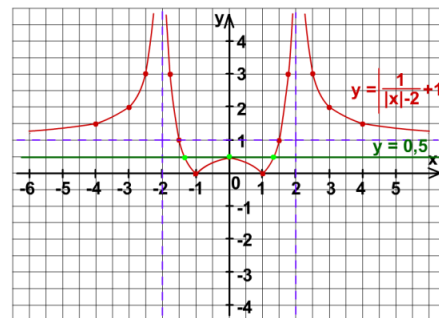
4) $y = \frac{1}{|x|-2} + 1$. График функции $y = \frac{1}{|x|-2}$ сдвигается вверх на 1 единицу вверх вдоль оси ординат.



5) $y = \left| \frac{1}{|x|-2} + 1 \right|$. Часть графика функции $y = \frac{1}{|x|-2}$, расположенная ниже оси абсцисс, симметрично отображается вверх.



3. Определим при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком функции три общие точки. Понятно, что $m=0,5$.

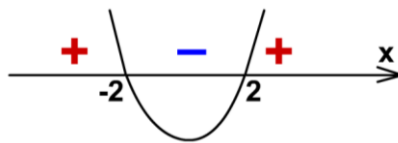


Ответ. $m=0,5$.

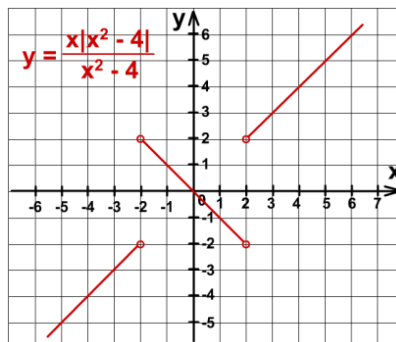
Пример 5. Постройте график функции $y = \frac{x|x^2-4|}{x^2-4}$ и определите при каких значениях m прямая $y=m$ не имеет с графиком общих точек.

Решение.

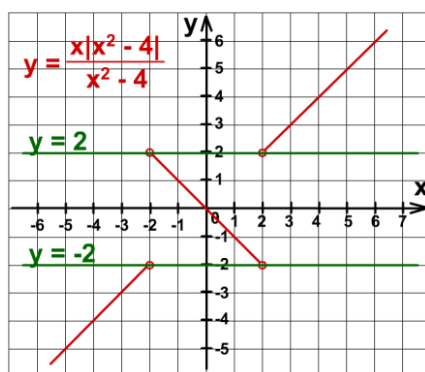
1. $D(y) = \mathbb{R}$, кроме $x = 2$, $x = -2$
2. Нули модуля: $x = 2$, $x = -2$. Нанесем нули подмодульных выражений на числовую прямую и расставим знаки подмодульных выражений.



3. Получим, $y = \begin{cases} -x, & \text{если } -2 < x < 2, \\ x, & \text{если } x < -2 \text{ или } x > 2. \end{cases}$



4. При $m = 2$ и -2 графики не имеют общих точек.



Ответ. $m = 2$, $m = -2$.

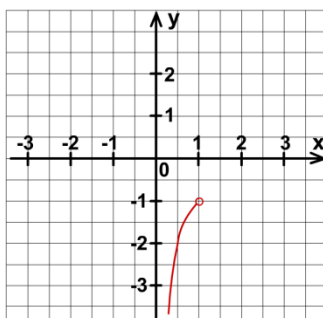
Пример 6. (Ларин вариант 105) Постройте график функции $y = \frac{x-1}{(\sqrt{x-x^2})^2}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

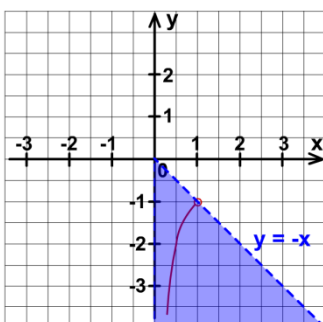
1. $D(y) = (0; 1)$.

2. Так как, $(\sqrt{x-x^2})^2 = x - x^2$, то $\frac{x-1}{x(1-x)} = -\frac{x-1}{x(x-1)} = -\frac{1}{x}$.

Значит, нужно построить график функции $y = -\frac{1}{x}$ при $0 < x < 1$



Теперь осталось определить при каких значениях k прямая $y=kx$ не имеет с графиком функции ни одной общей точки. Понятно, что $k < -1$.



Ответ. $k \in (-\infty; -1)$

Домашнее задание. Повторить пройденный материал. Предложить учащимся задания из написанных ниже задач для самостоятельного решения.

Задания для самостоятельного решения.

1. Постройте график функции $y = x^2 - 5|x| - x$ и определите, при каких значениях прямая $y = m$ имеет с графиком, не менее одной, но не более трех общих точек.
2. Постройте график функции $y = |x^2 + 6x + 5|$ и найдите, при каких значениях m прямая $y = m$ пересекает построенный график ровно в трех точках.
3. **Постройте график функции** $y = |x|(x - 2) + 2$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.
4. Постройте график функции $y = \frac{1}{2} \left(\left| \frac{x}{2} - \frac{2}{x} \right| + \frac{x}{2} + \frac{2}{x} \right)$ и определите по графику, сколько общих точек будет иметь график этой функции с прямой $y = c$ при различных значениях параметра c .

Занятие 7. Решение неравенств с двумя переменными на координатной плоскости.

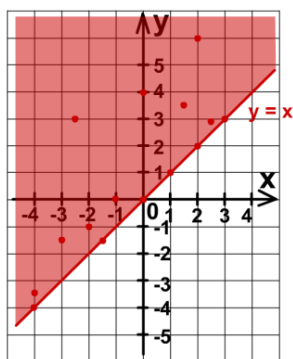
Ход занятия.

Историческая справка.



Для всех отрицательных значений аргумента x функция y равна -1 ; для x , равного нулю, функция тоже равна нулю, а для всех положительных значений аргумента функция равна 1 . Эта функция известна под названием «Сигнум x » и обозначается так: $\text{Sgn } x$ (от латинского *Signum* — знак).

Символ был введен немецким математиком Л. Кронекером (XIX в.).



Найдите пятнадцать решений неравенства $y \geq x$ и отметьте их на координатной плоскости.

Отметьте на координатной плоскости все решения данного неравенства.

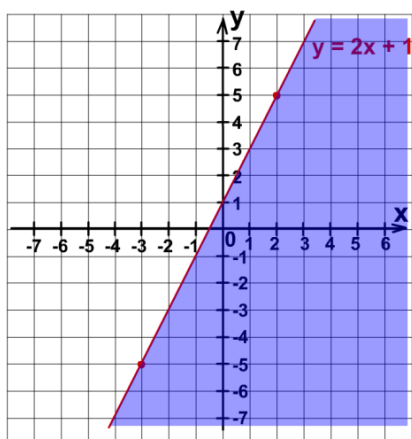
Например. $(3; 3); (-2; -1); (-4; -4); (0; 4); (-1; 0); (2,5; 2,9);$

$(-3; -1,5); (2; 6); (1,5; 3,5); (-4; -3,5); (2; 2); (-2,5; 3); (-1,5; -1,5); (1; 1); (0; 0).$

Решение неравенства с двумя переменными, а тем более системы неравенств с двумя переменными, представляется достаточно сложной задачей. Однако есть простой алгоритм, который помогает легко и без особых усилий решать на первый взгляд очень сложные задачи такого рода. Попробуем в нем разобраться.

Пусть мы имеем неравенство с двумя переменными одного из следующих видов:

$$y > f(x); y \geq f(x); y < f(x); y \leq f(x).$$



Решите неравенство $2x + 1 \geq y$.

Для изображения множества решений такого неравенства на координатной плоскости поступают следующим образом:

1. Строим график функции $y = f(x)$, который разбивает плоскость на две области.
2. Выбираем любую из полученных областей и рассматриваем в ней произвольную точку.

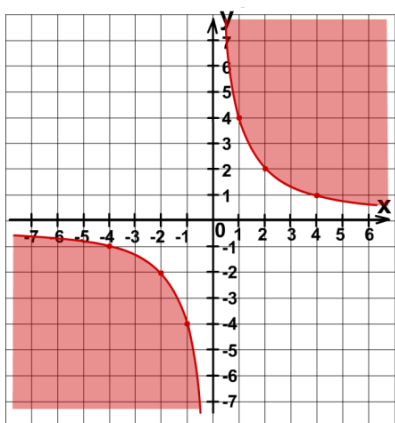
Проверяем выполнимость исходного неравенства для этой точки. Если в результате проверки получается верное числовое неравенство, то заключаем, что исходное неравенство выполняется во всей области, которой принадлежит выбранная точка. Таким образом, множеством решений неравенства – область, которой принадлежит выбранная точка. Если в результате проверки получается неверное числовое неравенство, то множеством решений неравенства будет вторая область, которой выбранная точка не принадлежит.

3. Если неравенство строгое, то границы области, то есть точки графика функции

$y = f(x)$, не включают в множество решений и границу изображают пунктиром. Если неравенство нестрогое, то границы области, то есть точки графика функции $y = f(x)$, включают в множество решений данного неравенства и границу в таком случае изображают сплошной линией.

А теперь рассмотрим несколько задач на эту тему.

Пример 1. Решить неравенство $xy \geq 4$.

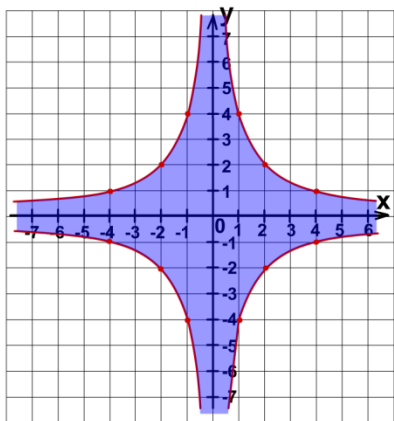


Решение.

1. Строим график уравнения $y = \frac{4}{x}$.

2. График разбивает координатную плоскость на две области. Выберем из первой области произвольную точку (5;3). Подставим координаты точки в неравенство $xy \geq 4$. Получим, $15 \geq 4$ верное неравенство. Значит, множеством решения неравенства является область, которой принадлежит выбранная точка.

3. Так как неравенство нестрогое, то граничные точки рисуем сплошной линией.



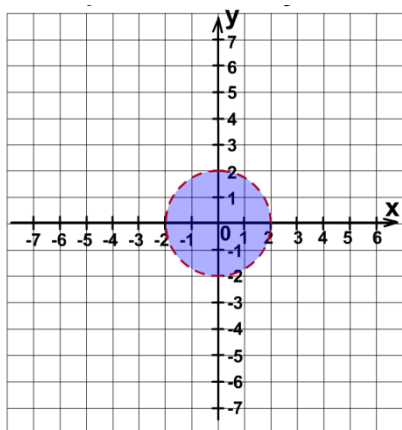
Пример 2. Решить неравенство $|x \cdot y| \leq 4$.

Решение.

1. Строим график уравнения $|x \cdot y| = 4$.

2. График разбивает координатную плоскость на две области. Выберем из первой области произвольную точку (5;3). Подставим координаты точки в неравенство $|x \cdot y| \leq 4$. Получим, $15 \leq 4$ неверное неравенство. Значит, множеством решения неравенства является область, которой не принадлежит выбранная точка.

3. Так как неравенство нестрогое, то граничные точки рисуем сплошной линией.



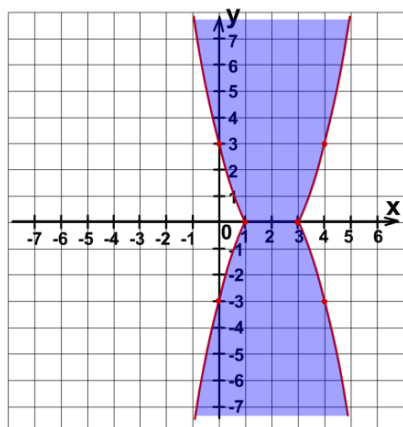
Пример 3. Решить неравенство $x^2 + y^2 < 4$.

Решение.

Строим график уравнения $x^2 + y^2 = 4$.

График разбивает координатную плоскость на две области. Выберем из первой области произвольную точку $(5;3)$. Подставим координаты точки в неравенство $x^2 + y^2 < 4$. Получим, $34 < 4$ неверное неравенство. Значит, множеством решения неравенства является область, которой не принадлежит выбранная точка.

3. Так как неравенство строгое, то граничные точки рисуем прерывистой линией.



Пример 4. Решить неравенство $|y| \geq x^2 - 4x + 3$.

Решение.

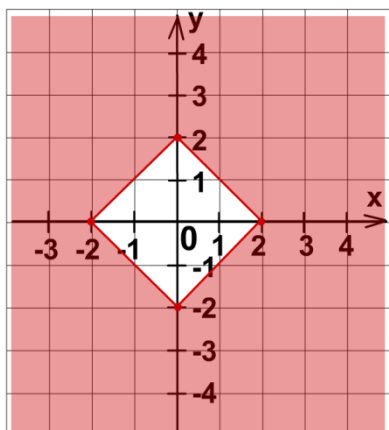
$$|y| \geq x^2 - 4x + 3, \text{ получим, } \begin{cases} y \geq x^2 - 4x + 3, \\ y \leq -(x^2 - 4x + 3) \end{cases}$$

1. Строим график уравнения

$$|y| = x^2 - 4x + 3$$

2. График разбивает координатную плоскость на две области. Выберем из первой области произвольную точку $(5;1)$. Подставим координаты точки в неравенство $|y| \geq x^2 - 4x + 3$. Получим, $1 \geq 8$ неверное неравенство. Значит, множеством решения неравенства является область, которой не принадлежит выбранная точка.

3. Так как неравенство нестрогое, то граничные точки рисуем сплошной линией



Пример 5. Решить неравенство $|x| + |y| > 2$.

Решение.

1. Построим график уравнения $|x| + |y| = 2$.

Сначала строим график в I четверти:

$x + y = 2$, где $x \geq 0$, $y \geq 0$. Затем достраиваем график, пользуясь симметрией относительно осей Ox и Oy .

Получаем квадрат с вершинами $(2; 0)$, $(0; 2)$, $(-2; 0)$, $(0; -2)$.

2. График разбивает координатную плоскость на две области. Выберем из первой области произвольную точку $(5;3)$. Подставим координаты точки в неравенство $|x| + |y| > 2$. Получим, $8 > 2$ верное неравенство. Значит, множеством решения неравенства является область, которой не принадлежит выбранная точка.
3. Так как неравенство строгое, то граничные точки рисуем прерывистой линией.

Домашнее задание. Повторить пройденный материал. Предложить учащимся задания из написанных ниже задач для самостоятельного решения.

Задания для самостоятельного решения.

1. Изобразите на координатной плоскости множества точек, координаты которых $(x;y)$ удовлетворяют неравенству $y \geq \sqrt{|x| + 1} - 2$.
2. Изобразите на координатной плоскости множества точек, координаты которых $(x;y)$ удовлетворяют неравенству $|x| + |y| \leq 3$.
3. Изобразите на координатной плоскости множества точек, координаты которых $(x;y)$ удовлетворяют неравенству $|y| \geq x^2 - 4x + 3$.
4. Изобразите на координатной плоскости фигуру, заданную неравенством и вычислите ее площадь $x^2 + y^2 \leq 4x$.

Итогом занятия может стать *самостоятельная работа*.

Неравенства с двумя переменными и их системы.

Неравенства с двумя переменными и их системы. Вариант 1.

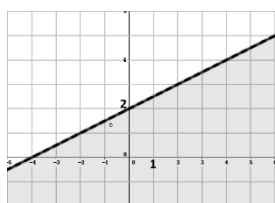
Часть 1

Для заданий с выбором ответа обведите кружком номер правильного ответа и перепишите его в бланк тестирования. Отвечая за задание с кратким ответом, запишите ответ в указанном месте, а затем перепишите его в бланк тестирования.

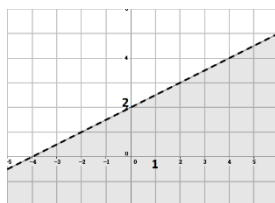
1. Решением неравенства $x^2 - 5xy + y^2 < 11$ является пара чисел

- 1) (0; -4) 2) (5; 0) 3) (1; -5) 4) (1; (-1))

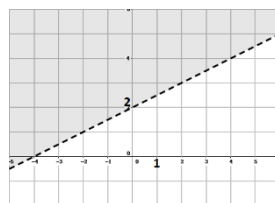
2. Множество точек, задаваемое неравенством $y < \frac{1}{2}x + 2$, изображено на рисунке



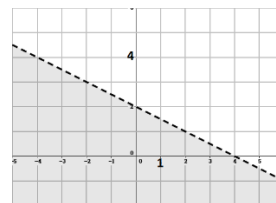
1)



2)



3)



4)

3. Множества точек координатной плоскости

- А) $xy > 0$ Б) $x^2 + y^2 \leq 4$ В) $y \geq x$

- 1) круг с центром в начале координат и радиусом, равным 2
2) верхнюю полуплоскость относительно прямой, содержащей биссектрисы I и III координатных четвертей
3) углы I и III координатных четвертей, включая оси координат.

Запишите в таблицу выбранные цифры.

А	Б	В

Ответ перенесите в бланк тестирования.

4. Пара чисел (-2;3) является решением системы неравенства

- 1) $\begin{cases} x \leq 0 \\ y > 4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y > 1 \\ xy < -7 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y \geq x \\ x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x > -5 \\ y > x^2 + 1 \end{cases}$

5. Установите соответствие между системами неравенств

$$\text{А) } \begin{cases} y \geq x \\ y < 0 \end{cases} \quad \text{Б) } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 2 \\ y \leq 2 \end{cases} \quad \text{В) } \begin{cases} y \geq x^2 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

и высказываниями

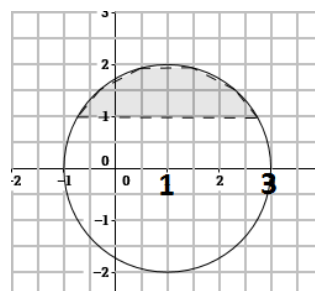
- 1) Система неравенств имеет решением квадрат со стороной, равной 2
- 2) Система неравенств не имеет решений
- 3) Решением системы неравенств является единственная точка.

Запишите в таблицу выбранные цифры.

А	Б	В

Ответ перенесите в бланк тестирования.

6. Множество точек координатной плоскости, изображенное на рисунке, задается системой неравенств



$$1) \begin{cases} (x + 1)^2 + y^2 \leq 2 \\ y \geq 1 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 \leq 4 \\ y \geq 1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 \geq 4 \\ y \geq 1 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 \leq 4 \\ y > 1 \end{cases}$$

7. Найдите площадь фигуры, задаваемой системой неравенств $\begin{cases} y \leq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 2x + 2 \end{cases}$

Ответ: _____

Ответ перенесите в бланк тестирования.

Часть 2

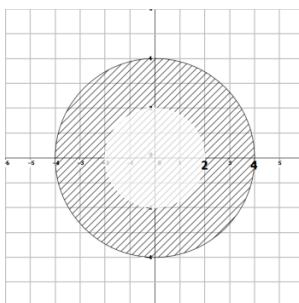
Выполните задания 8-12. Запишите ход решения с объяснениями и ответ на отдельном листе.

8. Какую фигуру задает множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} y \leq 2x \\ y \geq 2x - 4 \\ y \geq 0 \\ y \leq 2 \end{cases} ?$$

Постройте эту фигуру.

9. Задайте системой неравенств кольцо, изображенное на рисунке



10. Вершинами треугольника являются точки $A(0;4)$, $B(0;-1)$, $C(1;0)$. Задайте эту фигуру системой неравенств.

Неравенства с двумя переменными и их системы.

Вариант 2

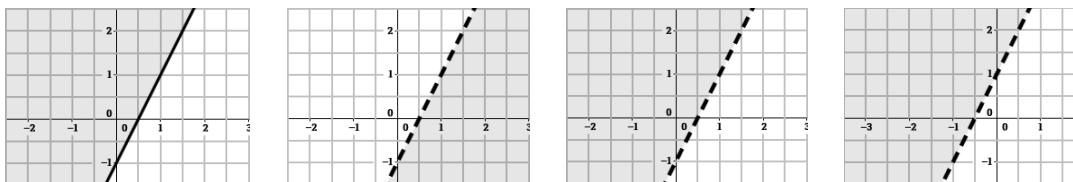
Часть 1

Для заданий с выбором ответа обведите кружком номер правильного ответа и перепишите его в бланк тестирования. Отвечая за задание с кратким ответом, запишите ответ в указанном месте, а затем перепишите его в бланк тестирования.

1. Решением неравенства $x^2 + 4xy - y^2 > 3$ является пара чисел

- 1) $(0;2)$ 2) $(-2;0)$ 3) $(1;-2)$ 4) $(-1;1)$

2. Множество точек, задаваемое неравенством $y > 2x - 1$ изображено на рисунке



3. Множества точек координатной плоскости

A) $x^2 + y^2 > 9$ Б) $xy < 0$ В) $y \geq 2$

задают

- 1) верхнюю полуплоскость относительно прямой $y=2$
- 2) множество точек вне круга с центром в начале координат и с радиусом, равным 3
- 3) углы II и IV координатных четвертей, включая оси координат.

Запишите в таблицу выбранные цифры.

А	Б	В

Ответ перенесите в бланк тестирования.

4. Пара чисел (3;-2) является решением системы неравенств

1) $\begin{cases} x > 3 \\ y \leq 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x < y^2 \\ xy \geq 1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x < y \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x > y \\ y^2 < x + 2 \end{cases}$

5. Установите соответствие между системами неравенств

A) $\begin{cases} y \geq x^2 \\ y < 0 \end{cases}$ Б) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ y \leq 0 \end{cases}$ В) $\begin{cases} y \geq x^2 \\ y \leq 0 \end{cases}$

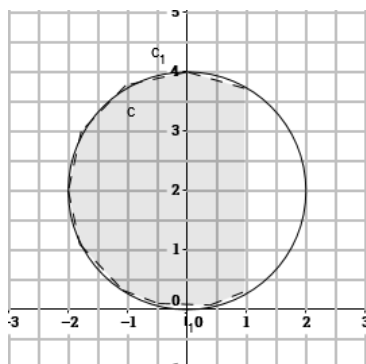
и высказываниями

- 1) система неравенств не имеет решений
- 2) решением системы неравенств является единственная точка
- 3) решение системы неравенств является полукруг.

Запишите в таблицу выбранные цифры.

А	Б	В

Ответ перенесите в бланк тестирования.



6. Множество точек координатной плоскости, изображенное на рисунке, задается системой неравенств

$$1) \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2 + (y - 2)^2 \leq 4 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x^2 + (y + 2)^2 \leq 4 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x^2 + (y - 2)^2 < 4 \\ x < 1 \end{cases}$$

7. Найдите площадь фигуры, задаваемой системой неравенств $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \\ y \geq \frac{1}{3}x - 1 \end{cases}$

Ответ: _____

Ответ перенесите в бланк тестирования.

Часть 2

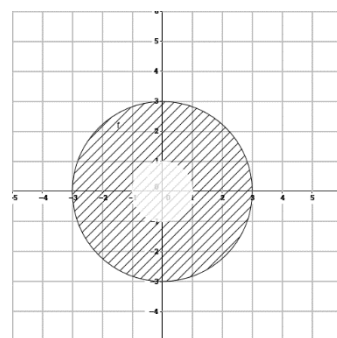
Выполните задания 8-12. Запишите ход решения с объяснениями и ответ на отдельном листе.

8. Какую фигуру задает множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 2 \\ y \leq 2x \\ y \leq 5 - x \end{cases} ?$$

Постройте эту фигуру.

9. Задайте системой неравенств кольцо, изображенное на рисунке



10. Вершинами треугольника являются точки $K(-1;0)$, $M(3;0)$, $N(0;-1)$.
Задайте эту фигуру системой неравенств.

Тест №8*	Неравенства с двумя переменными и их системы								
Вариант 1	Часть	№ задания	1	2	3	4	5	6	7
		Ответ	4	2	31 2	3	21 3	2	1

Часть 2

8. Какую фигуру задает множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} y \leq 2x \\ y \geq 2x - 4 \\ y \geq 0 \\ y \leq 2 \end{cases} ?$$

Постройте эту фигуру.

Указания к оцениванию	Баллы
Дано решение с объяснением. Правильный ответ: параллелограмм(см.рис)	2
Допущена ошибка в построении решения одного из неравенств или в ответе не записано название построенной фигуры (а сделан только верхний рисунок)	1
Во всех остальных случаях	0

9. Задайте системой неравенств кольцо, изображенной на рисунке

Указания к оцениванию	Баллы
Дано решение с объяснением. Правильный ответ: $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4 \\ x^2 + y^2 \leq 16 \end{cases}$	2
В ответе записаны нестрогие неравенства	1
Во всех остальных случаях	0

10. Вершинами треугольника являются точки A(0;4), B(0;-1), C(1;0). Задайте эту фигуру системой неравенств.

Указания к оцениванию	Баллы
Дано решение с объяснением. Правильный ответ: $\begin{cases} x > 0 \\ y \leq -4x + 4 \\ y \geq x - 1 \end{cases}$	3
В ответе записаны нестрогие неравенства	2
Во всех остальных случаях	0

Вариант 2

Часть 1:

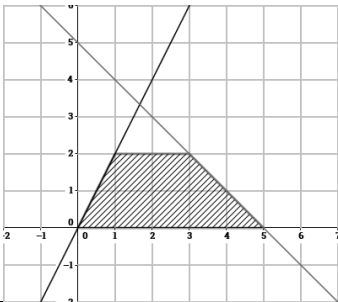
№ задания	1	2	3	4	5	6	7
Ответ	2	3	23 1	4	13 2	2	1,5

Часть 2:

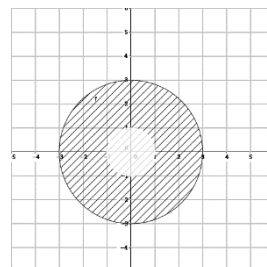
1. Какую фигуру задает множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 2 \\ y \leq 2x \\ y \leq 5 - x \end{cases} ?$$

Постройте эту фигуру.

Указания к оцениванию	Баллы
Дано решение с объяснением. Правильный ответ: трапеция (см. рис.)	2
	
Допущена ошибка в построении решения одного из неравенств или в ответе не записано название построенной фигуры (а сделан только верхний рисунок)	1
Во всех остальных случаях	0

9. Задайте системой неравенств кольцо, изображенное на рисунке



Указания к оцениванию	Баллы
Дано решение с объяснением. Правильный ответ: $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$	2
В ответе записаны нестрогие неравенства	1
Во всех остальных случаях	0

10. Вершинами треугольника являются точки K(-1;0), M(3;0), N(0;-1).
Задайте эту фигуру системой неравенств.

Указания к оцениванию	Баллы
Дано решение с объяснением. Правильный ответ: $\begin{cases} y \leq 0 \\ y \geq -x - 2 \\ y \geq \frac{1}{2}x - 2 \end{cases}$	3
В ответе записаны нестрогие неравенства	2
Во всех остальных случаях	0

Занятие 8-9. Решение неравенств, содержащих параметр, координатно-параметрическим методом.



Ход занятия

Историческая справка

В 1834 г. Н.И.Лобачевский писал: «Общее понятие требует, чтобы функцией от x называть число, которое дается для каждого x и вместе с x постепенно изменяется. Значение функции может быть дано или аналитическим выражением, или условием, которое подает средство испытывать все числа и выбирать одно из них; или, наконец, зависимость может существовать и оставаться неизвестной...»

Теме «Решение неравенств, содержащих параметры» в ныне действующих учебниках уделяется очень мало внимания. Однако, учащихся, которые принимают участие в различных олимпиадах, конкурсах проводимых ВУЗами, необходимо к ним готовить.

Предлагаемые задачи с параметрами предназначены для организации исследовательской работы учащихся при повторении курса «Функция и графики». Этот материал можно использовать при подготовке к олимпиадам, а также к сдаче ЕГЭ.

При решении задач с параметрами достаточно эффективно применять координатно-параметрический метод. Пусть на плоскости даны две взаимно перпендикулярные с общим началом (точкой O) числовые оси. Одну из них (Ox) назовем координатной; другую (Oa) – параметрической, а плоскость (xOa или aOx) – координатно-параметрической. Метод основан на нахождении множества всех точек КП-плоскости, значения координаты x и параметра a каждой из которых удовлетворяют заданному в условии задачи условию.

Пример 1

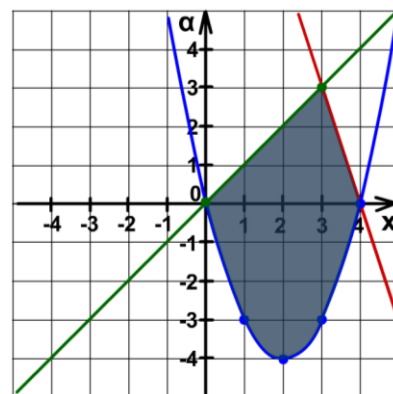
Найти все значения параметра α , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} \alpha + 3x \leq 12, \\ \alpha + 4x \geq x^2, \\ \alpha \leq x \end{cases} \quad \text{имеет хотя бы одно решение.}$$

Решение

Приведем данную систему к виду

$$\begin{cases} \alpha \leq 12 - 3x, \\ \alpha \geq x^2 - 4x, \\ \alpha \leq x \end{cases}$$



построим в системе координат $Ox\alpha$ графики этой системы

Множество всех точек, удовлетворяющих данной системе, покажем светло-синим цветом. Рассмотрим различные положения прямой $\alpha = \alpha_1$. Очевидно, что при $\alpha < -4$ и $\alpha > 3$ прямая не имеет с закрашенной областью ни одной общей точки, а в точках $\alpha = -4$ и $\alpha = 3$ единственное решение, следовательно, система неравенств имеет хотя бы одно решение при $\alpha \in [-4; 3]$.

Ответ. $[-4; 3]$

Пример 2

Найти все значения параметра α , при каждом из которых хотя бы одно решение неравенства $x^2 + \alpha + |x - \alpha - 1| + 1 \leq 3x$ принадлежит отрезку $[0; 1]$.

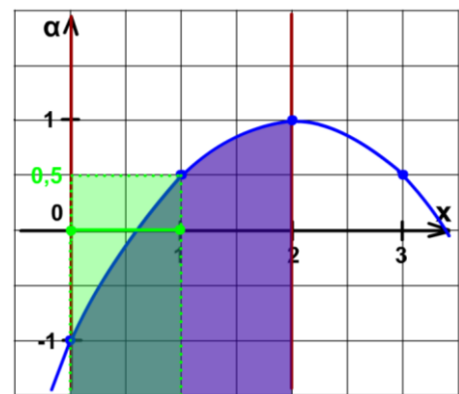
Решение

Приведем неравенство к виду $|x - \alpha - 1| \leq 3x - x^2 - \alpha - 1$.

Поскольку $|p| \leq q$ в том случае, если $-q \leq p \leq q$, тогда получим систему неравенств

$$\begin{cases} x - \alpha - 1 \leq 3x - x^2 - \alpha - 1, \\ x - \alpha - 1 \geq x^2 - 3x + \alpha + 1, \end{cases} \quad \text{отсюда}$$

$$\begin{cases} x(x-2) \leq 0, \\ \alpha \leq -0,5x^2 + 2x - 1 \end{cases}$$



Множеством всех точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $x(x-2) \leq 0$ является полоса, заключенная между прямыми $x = 0$ и $x = 2$, включая эти прямые. Множеством всех точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$\alpha \leq -0,5x^2 + 2x - 1$, является парабола $\alpha = -0,5x^2 + 2x - 1$ и часть плоскости, расположенная ниже этой параболы.

Очевидно что, система неравенств

$$\begin{cases} x(x-2) \leq 0, \\ \alpha \leq -0,5x^2 + 2x - 1 \end{cases} \quad \text{имеет хотя бы одно решение на отрезке } [0; 1] \text{ при}$$

$$\alpha \in (-\infty; 0,5].$$

Пример 3

Найти все значения параметра α , при котором из неравенства

$\alpha x^2 - x + 1 - \alpha < 0$ следует неравенство $0 < x < 1$

Решение

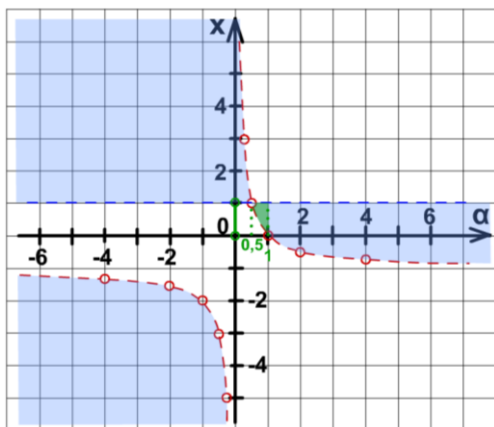
Преобразуем это неравенство к виду

$$(\alpha x^2 - \alpha) - (x - 1) < 0$$

$$\alpha(x + 1)(x - 1) - (x - 1) < 0$$

$$(x - 1)(\alpha x + \alpha - 1) < 0$$

Найдем нули промежутков: $x = 1$ и $x = 1/\alpha - 1$ и построим графики в системе координат $O\alpha x$:



По графику видно, что $x \in (0; 1)$ при

$$\alpha \in (0, 5; 1]$$

Пример 4

Для каждого значения параметра α решить неравенство $|x| + |\alpha| \leq 1$

Решение

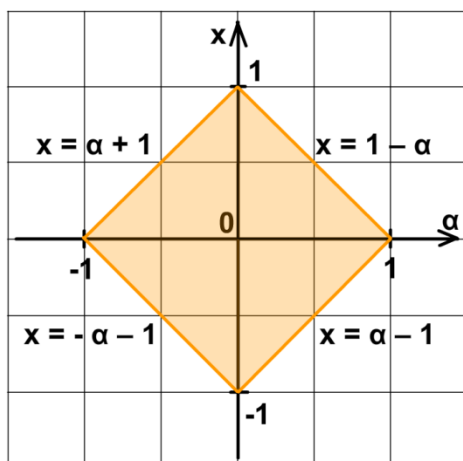
Рассмотрим 4 случая и построим графики функций в осях $O\alpha x$

1) $x \geq 0, \alpha \geq 0 : x \leq 1 - \alpha$

2) $x \geq 0, \alpha < 0 : x \leq \alpha + 1$

3) $x < 0, \alpha \geq 0 : x \geq \alpha - 1$

4) $x < 0, \alpha < 0 : x \geq -\alpha - 1$



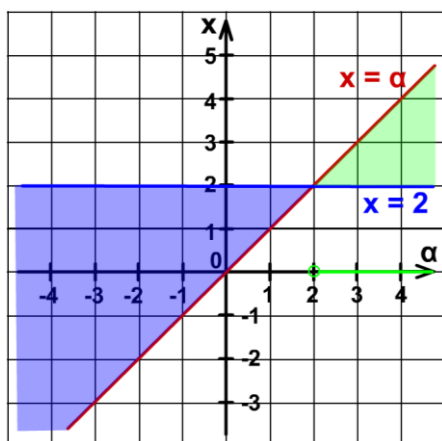
Ответ: при $\alpha \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ решений нет; при $\alpha \in (-1; 0]$ $x \in [-1-\alpha; 1+\alpha]$; при $\alpha \in (0; 1)$ $x \in [-1+\alpha; 1-\alpha]$; при $\alpha = \pm 1$ $x = 0$.

Пример 5

Для каждого значения параметра α решить неравенство $(x - \alpha)(x - 2) \leq 0$.

Решение

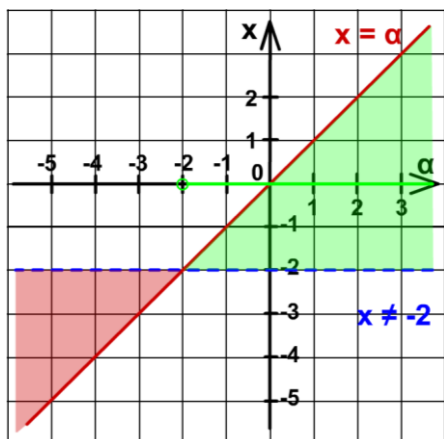
Построим в системе координат $O\alpha x$ графики функций $x = \alpha$ и $x = 2$



Область, удовлетворяющая неравенству, закрашена светло-серым цветом. По графику очевидно, что при $\alpha \in (2; +\infty)$, $x \in [2; \alpha]$; при $\alpha = 2$, $x = 2$; при $\alpha \in (-\infty; 2)$, $x \in [\alpha; 2]$.

Пример 6

Для каждого значения параметра α решить неравенство $\frac{x-\alpha}{x+2} \leq 0$



Решение Построим в системе координат $Ox\alpha$ графики функций $x = \alpha$ и $x = -2$

Область, удовлетворяющая неравенству, закрашена светло-серым цветом. По графику очевидно, что при $\alpha \in (-2; +\infty)$, $x \in (-2; \alpha]$; при $\alpha = -2$, решений нет; при $\alpha \in (-\infty; -2)$, $x \in [\alpha; -2)$.

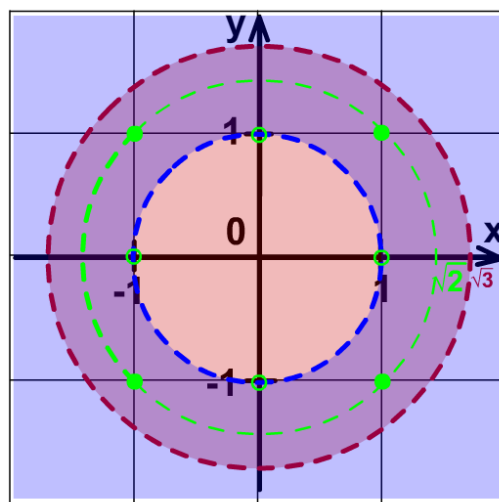
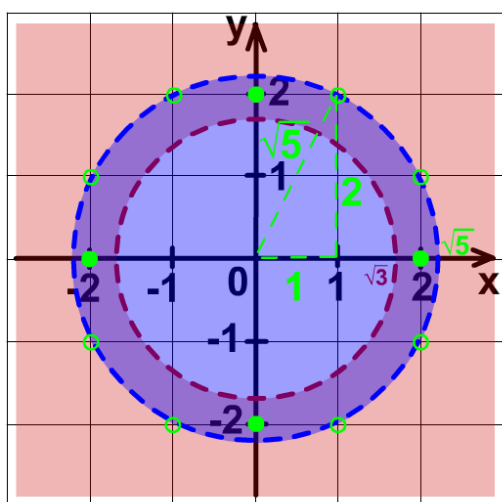
Пример 7. Найдите все значения параметра α , при которых неравенство $(x^2 + y^2 - 3)(x^2 + y^2 - \alpha) < 0$ имеет 4 целых решения

Решение

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3 > 0 \\ x^2 + y^2 - \alpha < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 3 < 0 \\ x^2 + y^2 - \alpha > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 > 3 \\ x^2 + y^2 < \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 < 3 \\ x^2 + y^2 > \alpha \end{cases}$$

Ответ: $[1; 2) \cup (4; 5]$



Пример 10. Найти все значения параметра α , при которых неравенство

$$\left| \frac{x^2 - x - 2\alpha}{x - \alpha} - 1 \right| \leq 2 \text{ имеет единственное решение на отрезке } [1; 3].$$

Решение

$$\left| \frac{x^2 - x - 2\alpha - x + \alpha}{x - \alpha} \right| \leq 2$$

$$\left| \frac{x^2 - 2x - \alpha}{x - \alpha} \right| \leq 2$$

Используя правило раскрытия модуля, получим:

$$\begin{cases} \frac{x^2 - 2x - \alpha}{x - \alpha} \leq 2 \\ \frac{x^2 - 2x - \alpha}{x - \alpha} \geq -2 \end{cases}$$

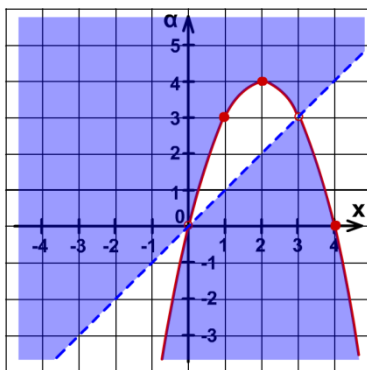
$$\begin{cases} \frac{x^2 - 2x - \alpha - 2x + 2\alpha}{x - \alpha} \leq 0 \\ \frac{x^2 - 2x - \alpha + 2x - 2\alpha}{x - \alpha} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2 - 4x + \alpha}{x - \alpha} \leq 0 & (1) \\ \frac{x^2 - 3\alpha}{x - \alpha} \geq 0 & (2) \end{cases}$$

(1): построим графики функций $\alpha = -x^2 + 4x$ и $\alpha = x$ в осях $Ox\alpha$

(2): построим графики функций $\alpha = \frac{1}{3}x^2$ и $\alpha = x$ в осях $Ox\alpha$

Объединим:



Ответ: 3.

Домашнее задание. Повторить пройденный материал. Предложить учащимся задания из написанных ниже задач для самостоятельного решения.

Задания для самостоятельного решения.

1. На координатно-параметрической плоскости aOx изобразить множество точек, значения координаты x и параметра a каждой из которых удовлетворяют заданным неравенствам и для каждого значения параметра a решить относительно x эти неравенства:
 - а) $\frac{x}{2a} > 0$ (Ответ: если $a > 0$, то $x < 2a$, $a < 0$, $x > 2a$);
 - б) $x^2 \leq a^2$ (Ответ: если $a < 0$, $a \leq x \leq -a$; $a = 0$, $x = 0$; $a > 0$, $-a \leq x \leq a$);
 - в) $|x| - a < 0$ (Ответ: если $a < 0$, $x < -a$, $a = 0$, $x < 0$; $a > 0$, $x < a$);
2. При каждом значении a найдите все решения неравенства $x - |a| > 0$.
(Ответ: если $a < 0$, $x > -a$; $a = 0$, $x > 0$; $a > 0$, $x > a$);
3. При каждом значении a найдите все решения неравенства $x^2 - 2x - a \geq 0$.
Ответ: $a < -1$, $x \in R$,
 $a = -1$ $x = -1$
 $a > -1$ $x \in (-\infty; -1 - \sqrt{1+a}) \cup (-1 + \sqrt{1+a}; +\infty)$.
4. При каждом значении a найдите все решения неравенства $a(x-1) > x-2$.
Ответ: $a < 1$, $x < \frac{a-2}{a-1}$,
 $a = 1$ $x \in R$
 $a > 1$ $x > \frac{a-2}{a-1}$.
5. При каждом значении a найдите все решения неравенства $x^2 - 8ax + 15a^2 < 0$.
Указание. Разложить левую часть на множители $(x-3a)(x-5a) < 0$.
Ответ: $a < 0$, $5a < x < 3a$
 $a = 0$ решений нет
 $a > 0$, $3a < x < 5a$.

Занятие 10. Решение уравнений с параметрами ЕГЭ.

Цель показать применение координатно-параметрического метода при решении уравнений с параметрами.

Ход занятия

Историческая справка



«Функция Дирихле» $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{для всех рациональных значений } x \\ 0 & \text{для всех иррациональных значений } x \end{cases}$$

Эта функция задана двумя формулами и словесно. Она играет известную роль в анализе. Аналитически ее можно определить лишь с помощью довольно сложной формулы, не способствующей успешному изучению ее свойств. Таким образом, примерно в середине XIX в. после длительной борьбы мнений понятие функции освободилось от уз аналитического выражения, от единовластия математической формулы.

Занятие можно проводить в виде семинара, обучающихся удобно распределить по группам для проведения исследовательской работы

Найдите все значения параметра α , при которых уравнение

$$(x + 7)^2 + (\alpha - 6)^2 = |x - \alpha + 13| + |x + \alpha + 1| \text{ имеет единственное решение}$$

Решение

Решим задачу графически

1) Найдем нули подмодульных выражений

$$x - \alpha + 13 = 0 \quad x = \alpha - 13$$

$$x + \alpha + 1 = 0 \quad x = -\alpha - 1$$

	I	II	III	IV
$x - \alpha + 13$	+	-	-	+
$x + \alpha + 1$	+	+	-	-

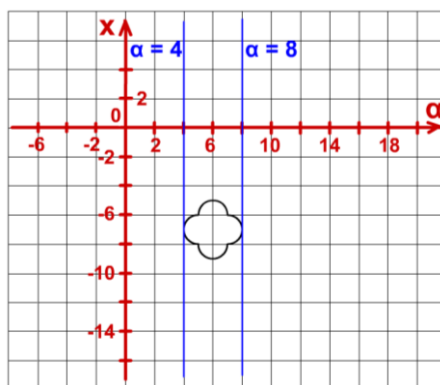
$$I. \quad (x + 7)^2 + (\alpha - 6)^2 = x - \alpha + 13 + x + \alpha + 1$$

$$x^2 + 14x + 49 + (\alpha - 6)^2 - 2x - 14 = 0$$

$$x^2 + 12x + 35 + (\alpha - 6)^2 = 0$$

$$(x + 6)^2 + (\alpha - 6)^2 = 1 \quad - \text{ уравнение окружности, ц. } (6; -6), r=1$$

$$\begin{aligned}
\text{II.} \quad & (x+7)^2 + (\alpha-6)^2 = -x + \alpha - 13 + x + \alpha + 1 \\
& (x+7)^2 + \alpha^2 - 12\alpha + 36 - 2\alpha + 12 = 0 \\
& (x+7)^2 + \alpha^2 - 14\alpha + 48 = 0 \\
& (x+7)^2 + (\alpha-7)^2 = 1 \quad - \text{уравнение окружности, ц. } (7; -7), r=1 \\
\text{III.} \quad & (x+7)^2 + (\alpha-6)^2 = -x + \alpha - 13 - x - \alpha - 1 \\
& x^2 + 14x + 49 + (\alpha-6)^2 + 2x + 14 = 0 \\
& x^2 + 16x + 63 + (\alpha-6)^2 = 0 \\
& (x+8)^2 + (\alpha-6)^2 = 1 \quad - \text{уравнение окружности, ц. } (6; -8), r=1 \\
\text{IV.} \quad & (x+7)^2 + (\alpha-6)^2 = x - \alpha + 13 - x - \alpha - 1 \\
& (x+7)^2 + \alpha^2 - 12\alpha + 36 + 2\alpha - 12 = 0 \\
& (x+7)^2 + \alpha^2 - 10\alpha + 24 = 0 \\
& (x+7)^2 + (\alpha-5)^2 = 1 \quad - \text{уравнение окружности, ц. } (5; -7), r=1
\end{aligned}$$



Ответ: единственное решение при $\alpha = 4$; $\alpha = 8$.

Пример 1. (ЕГЭ 2013) Найдите все значения параметра α , при которых уравнение

$$\alpha x + \sqrt{-7 - 8x - x^2} = 2\alpha + 3 \text{ имеет единственное решение}$$

Решение

Будем решать задачу графическим способом

$$-\alpha x + 2\alpha + 3 = \sqrt{-7 - 8x - x^2}$$

$$\begin{cases} y = \sqrt{-7 - 8x - x^2} & (1) \\ y = -\alpha x + 2\alpha + 3 & (2) \end{cases}$$

Построим график каждой функции и найдем, при каком значении параметра графики имеют единственную точку пересечения.

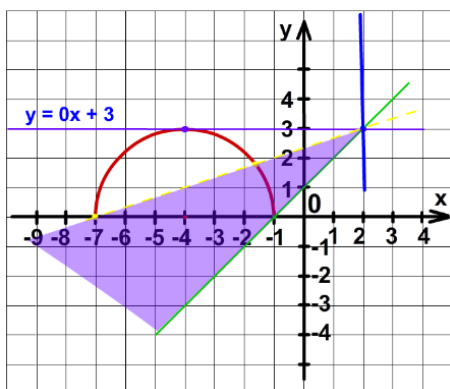
$$(1): y = \sqrt{-7 - 8x - x^2}$$

Преобразуем выражение под корнем - выделим полный квадрат:

$$\sqrt{-7 - 8x - x^2} = \sqrt{-(x^2 + 8x + 7)} = \sqrt{-((x + 4)^2 - 9)} = \sqrt{9 - (x + 4)^2}$$

$y = \sqrt{9 - (x + 4)^2}$ графиком является полуокружность с центром $(-4; 0)$, радиусом равным 3.

$$(2): y = -\alpha x + 2\alpha + 3$$



$y = -\alpha(x - 2) + 3$ – семейство прямых, имеющих различный коэффициент наклона и общую точку $(2; 3)$

$$k = \operatorname{tg} \alpha = 1 \text{ (AB)}$$

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3} \text{ (BC)}$$

$$k = \operatorname{tg} 0 = 0 \text{ (BD)}$$

Ответ: $\alpha \in [-1; -\frac{1}{3}) \cup \{0\}$.

Пример 2. (Досрочный ЕГЭ -2015)

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений имеет единственное решение

$$\begin{cases} \frac{(y^2 - xy - 7y + 4x + 12)\sqrt{x+4}}{\sqrt{7-y}} = 0, \\ a = x + y. \end{cases}$$

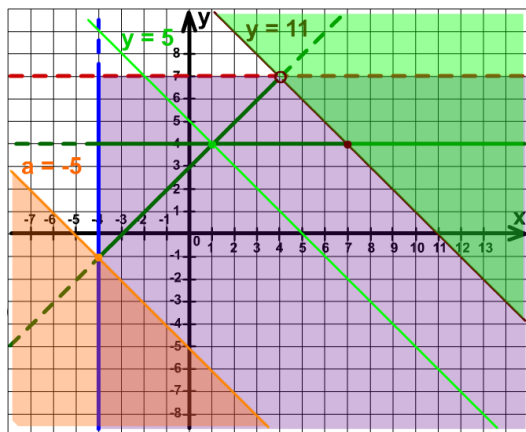
Решение.

$$1. \text{ Рассмотрим первое уравнение системы } \frac{(y^2 - xy - 7y + 4x + 12)\sqrt{x+4}}{\sqrt{7-y}} = 0$$

При $x < -4$ и $y \geq 7$ уравнение не имеет решений. Разложим числитель на множители

$$\begin{aligned} y^2 - xy - 7y + 4x + 12 &= (y^2 - 7y + 12) - (xy - 4x) \\ &= (y - 4)(y - 3) - x(y - 4) = (y - 4)(y - 3 - x) \end{aligned}$$

При $x \geq -4$ и при $y < 7$ уравнение задает прямые $y=4$, $y=3+x$. Получим,



При каждом значении a прямая $y=-x+a$ задает прямую параллельную $y=-x$ или совпадающую с ней. Число решений исходной системы равно числу точек пересечения прямых $y=4$, $y=x+3$, $x=-4$ с прямой $y=-x+a$ при $x \geq -4$ и $y < 7$. Таким образом, исходная система имеет единственное решение при $a \leq -5$, $a=5$, $a \geq 11$.

Ответ. $a \leq -5$, $a=5$, $a \geq 11$.

Пример 3 (Досрочный ЕГЭ- 2016)

Найдите все различные решения параметра a , при каждом из которых система уравнений имеет ровно два различных решения

$$\begin{cases} \frac{xy^2 - 3xy - 3y + 9}{\sqrt{x+3}} = 0, \\ y = ax. \end{cases}$$

Решение

Будем решать задачу графическим способом

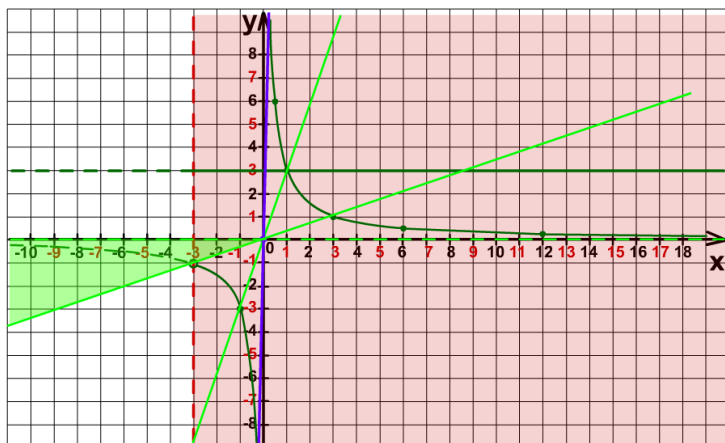
Рассмотрим первое уравнение системы $\frac{xy^2 - 3xy - 3y + 9}{\sqrt{x+3}} = 0$

При $x < -3$ уравнение не имеет решений. Разложим числитель на множители

$$xy^2 - 3xy - 3y + 9 = xy(y - 3) - 3(y - 3) = (y - 3)(xy - 3).$$

При $x > -3$ уравнение задает прямые $y=3$ и $y = \frac{3}{x}$.

Второе уравнение системы задает семейство прямых, проходящих через начало координат с переменным угловым коэффициентом. Получим, число решений исходной системы равно числу точек пересечения графиков функций $y=3$, $y=\frac{3}{x}$, с прямой



$y=ax$ при $x > -3$. Таким образом, исходная система имеет ровно два различных решения решение при $a \in (0; \frac{1}{3}] \cup \{3\}$.

Итогом занятия может стать домашняя самостоятельная работа.

Домашняя самостоятельная работа по теме «Решение уравнений с параметрами с помощью координатно-параметрической плоскости»

1. При каких значениях a уравнение $(a + 4x - x^2 - 1)(a + 1 - |x - 2|) = 0$ имеет 3 корня?
2. При каких значениях a уравнение $\sqrt{x+a} = x$ имеет 2 корня?
3. При каких значениях a уравнение $|x - 1| - 1 = a$ не имеет решений?

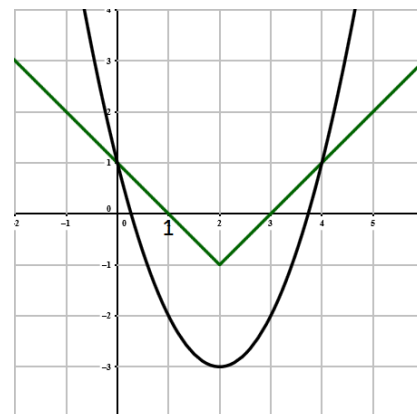
4. При каких значениях a уравнение $3 - \sqrt{(x-2)^2} = a$ имеет одно решение?
5. *При каких значениях a уравнение $(a + 2x - x^2 + 19)(a - 3 - |x - 4|) = 0$ имеет 3 корня?

Решение.

№ 1. При каких значениях a уравнение $(a + 4x - x^2 - 1)(a + 1 - |x - 2|) = 0$ имеет 3 корня?

$$\begin{cases} a + 4x - x^2 - 1 = 0, \\ a + 1 - |x - 2| = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = x^2 - 4x + 1, \\ a = |x - 2| - 1. \end{cases}$$



Ответ. Уравнение имеет 3 корня при $a = -1$.

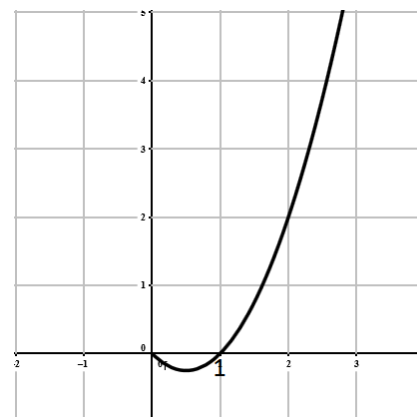
№ 2. При каких значениях a уравнение $\sqrt{x+a} = x$ имеет 2 корня?

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x + a = x^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ a = x^2 - x. \end{cases}$$

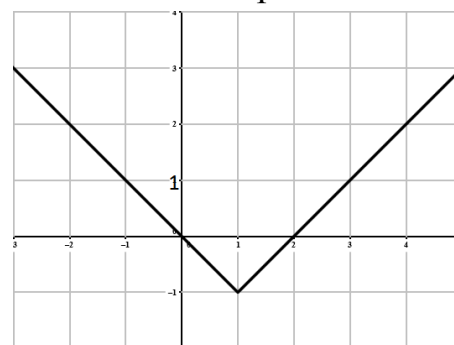
Ответ. Уравнение имеет 2 корня

при $-0,25 < a \leq 0$



№ 3. При каких значениях a уравнение $|x - 1| - 1 = a$ не имеет решений?

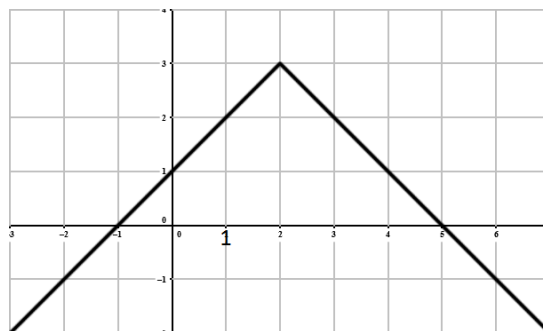
Уравнение не имеет решений при $a < -1$.



№ 4. При каких значениях a уравнение $3 - \sqrt{(x-2)^2} = a$ имеет одно решение?

$$a = 3 - |x - 2|$$

Уравнение имеет одно
решение при $a=3$.



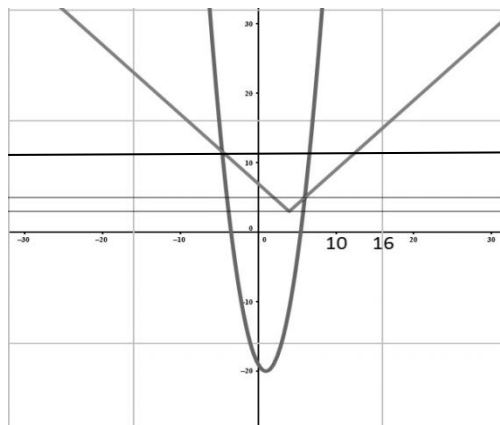
№ 5. При каких значениях a уравнение

$$(a + 2x - x^2 + 19)(a - 3 - |x - 4|) = 0 \text{ имеет 3 корня?}$$

$$\begin{cases} a = x^2 - 2x - 19, \\ a = 3 + |x - 4|. \end{cases}$$

Уравнение имеет три
корня при $a=3$, $a=5$,

$$a = \frac{-1 - \sqrt{105}}{2}$$



Занятия 10-11. Итоговые занятия.

Защита творческих работ. Рефлексия. Обсуждение вопросов: Что мне дал курс? Как приобретенные знания и умения могут быть использованы в процессе изучения школьных предметов, в выборе дальнейшего пути получения образования?

Тематика возможных творческих (исследовательских) работ учащихся

1. Русские пословицы в графиках функций. Чтобы проиллюстрировать характерные свойства функций, можно обратиться к пословицам, ведь пословицы – это отражение устойчивых закономерностей выверенных многовековым опытом народа.

Например: изобразите пословицу «Чем дальше в лес, тем больше дров» при помощи графика. Как вы ее понимаете?

2. Профессии + графики функций.

В этом проекте учащимся предстоит:

- изучить интересные и престижные профессии,
- выделить те группы профессий, в которых пригодятся геометрические преобразования графиков и умение читать графики функций,
- детально изучить несколько профессий,
- создать базу данных (включающую название профессии, диапазон заработной платы, необходимые навыки образования и работы, учебные заведения в которых можно получить необходимое образование, какие школьные предметы требуются на вступительных экзаменах, предполагаемое место работы, должностные обязанности, и т.п.)

3. Из истории возникновения и развития понятия функции.
4. Использование графиков функций в создании рисунков.
5. Построение графиков функций на отрезке.
6. Графики степенных функций.
7. Построение графиков функций, содержащих модуль.
8. Графический способ решения уравнений, неравенств и систем уравнений.